# Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II

5.11.2014

Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johanna Rämö, johanna.ramo@helsinki.fi

# Käytännön asioita

- Ykkösosan koetulokset ovat kurssisivulla.
- Kurssipalautetta voi antaa vielä perjantaihin asti.
- Pääaineopiskelija: Muista kannettavan/taulutietokoneen tilaus.

# Kurssikoe

- Kokeenkatsomistilaisuus pe 7.11. klo 13.00-14.00 huoneessa D340.
- Koettaan saa katsoa, mutta **sitä ei saa itselleen**.
- Kokeen voi uusia yleistentissä. Lisätietoa on kurssisivulla.
- Jos koetuloksesi huolettaa sinua, tule juttelemaan!

# Etsi itsellesi pari

Siirry istumaan toisen ihmisen viereen. Kaikilla pitää olla pari, jonka kanssa työskennellä.

Jos et tunne pariasi, esittele itsesi.

# Totta vai tarua?

(a) Jos yhtälöryhmän matriisissa on vapaa muuttuja, yhtälöryhmällä on äärettömän monta ratkaisua.
(b) Jos matriisin alin nollasta poikkeava rivi ei ole epätosi, vastaavalla yhtälöryhmällä on ratkaisuja.
(c) Jos yhtälöryhmän matriisi voidaan muuttaa redusoiduksi porrasmatriisiksi, yhtälöryhmällä on täsmälleen yksi ratkaisu.
(d) Jos yhtälöryhmän kerroinmatriisin determinantti on nolla, yhtälöryhmällä on äärettömän monta ratkaisua.

Mikään väitteistä ei ole totta.

# Miten korjaisit ratkaisua?

**Tehtävä:** Osoita, että joukko $W = \{(a, 3a, 4b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ on avaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruus.

**Ratkaisu:**

(a) $(a, 3a, 4b) + (c, 3c, 4d) = (a + c,\ 3(a + c),\ 4(b + d)) \in W$, $c, d \in \mathbb{R}$

(b) $r(a, 3a, 4b) = (ra,\ 3ra,\ 4rb) \in W, \quad r \in \mathbb{R}$

(c) $(0, 0, 0) = (0,\ 3 \cdot 0,\ 4 \cdot 0) \in A$

# Aliavaruus

### Määritelmä

Olkoon $V$ vektoriavaruus. Sen osajoukko $W$ on vektoriavaruuden $V$ *aliavaruus*, jos seuraavat ehdot pätevät:

(a) $\bar{w} + \bar{u} \in W$ kaikilla $\bar{w}, \bar{u} \in W$

(b) $r\bar{w} \in W$ kaikilla $r \in \mathbb{R}$ ja $\bar{w} \in W$

(c) $\bar{0} \in W$.

# Kumpi ratkaisuista on mielestäsi parempi?

**Tehtävä:** Kuuluuko matriisi $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ aliavaruuteen

$$W = \operatorname{span}\left( \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right)?$$

**Ratkaisu 1:** Huomataan, että

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Koska $A$ on virittäjävektoreiden lineaarikombinaatio, se on aliavaruuden $W$ alkio.

**Ratkaisu 2:** Tutkitaan, onko yhtälöllä

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

ratkaisuja. (Tässä $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$).

Yhtälö saadaan muotoon

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 & 0 \\ x_2 - x_3 & 2x_1 \end{bmatrix}$$

ja tästä saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 &= 1 \qquad \Rightarrow \quad x_2 = 1 - 2x_1 \Leftrightarrow x_2 = 1 - 1 = 0 \\ x_2 - x_3 &= 4 \qquad \Rightarrow \quad x_3 = -4 \\ 2x_1 &= 1 \qquad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Koska ratkaisu löytyy, on $A$ aliavaruuden $W$ alkio.