Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II

4.11.2014

Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johanna Rämö, johanna.ramo@helsinki.fi

Käytännön asioita

- Ykkösosan koetulokset ovat kurssisivulla.
- Kokeen voi uusia yleistentissä. Lisätietoa on kurssisivulla.
- Kurssipalautetta voi antaa vielä.
- Pääaineopiskelija: Muista kannettavan/taulutietokoneen tilaus.

Kokeenkatsomistilaisuus

- Pe 7.11. klo 13.00-14.00 huoneessa D340.
- Koettaan saa katsoa, mutta **sitä ei saa itselleen**.

Mitä seuraava kuva esittää?

Etsi itsellesi pari

Siirry istumaan toisen ihmisen viereen. Kaikilla pitää olla pari, jonka kanssa työskennellä.

Jos et tunne pariasi, esittele itsesi.

Kokonaisuuden hahmottaminen

Yksityiskohtien ulkoaopettelulla ei pötki pitkälle. Täytyy oppia näkemään kokonaisuus.

Milloin vektoriavaruuden osajoukko on vektoriavaruus?

Tutkitaan joukkoa

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 0\}.$$

Onko A vektoriavaruus, kun yhteenlaskuna on vektoreiden tavallinen yhteenlasku ja skalaarikertolaskuna on vektoreiden tavallinen skalaarikertolasku?

Mitkä vektoriavaruuden ehdoista pitää käydä läpi ja mitkä ovat totta automaattisesti?

Mene osoitteeseen `presemo.helsinki.fi/joh` ja äänestä.

Vektoriavaruus

Oletetaan, että joukossa V on määritelty yhteenlasku ja skalaarikertolasku jollakin tavalla. Jos alla listatut ehdot pätevät kaikilla $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in V$ ja $a, b \in \mathbb{R}$, joukkoa V kutsutaan *vektoriavaruudeksi* ja sen alkioita *vektoreiksi*.

1. $\bar{v} + \bar{w} = \bar{w} + \bar{v}$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w} \in V$.
2. $(\bar{v} + \bar{w}) + \bar{u} = \bar{v} + (\bar{w} + \bar{u})$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in V$.
3. On olemassa niin kutsuttu *nollavektori* $\bar{0} \in V$, jolle pätee $\bar{v} + \bar{0} = \bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in V$.
4. Jokaisella vektorilla $\bar{v} \in V$ on niin kutsuttu *vastavektori* $-\bar{v} \in V$, jolle pätee $\bar{v} + (-\bar{v}) = \bar{0}$.
5. $a(\bar{v} + \bar{w}) = a\bar{v} + a\bar{w}$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w} \in V$ ja $a \in \mathbb{R}$.
6. $(a + b)\bar{v} = a\bar{v} + b\bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in V$ ja $a, b \in \mathbb{R}$.
7. $(ab)\bar{v} = a(b\bar{v})$ kaikilla $\bar{v} \in V$ ja $a, b \in \mathbb{R}$.
8. $1\bar{v} = \bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in V$.

Vektoriavaruus

Oletetaan, että joukossa V on määritelty yhteenlasku ja skalaarikertolasku jollakin tavalla. Jos alla listatut ehdot pätevät kaikilla $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in V$ ja $a, b \in \mathbb{R}$, joukkoa V kutsutaan *vektoriavaruudeksi* ja sen alkioita *vektoreiksi*.

1. $\bar{v} + \bar{w} = \bar{w} + \bar{v}$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w} \in V$.
2. $(\bar{v} + \bar{w}) + \bar{u} = \bar{v} + (\bar{w} + \bar{u})$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in V$.
3. On olemassa niin kutsuttu *nollavektori* $\bar{0} \in V$, jolle pätee $\bar{v} + \bar{0} = \bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in V$.
4. Jokaisella vektorilla $\bar{v} \in V$ on niin kutsuttu *vastavektori* $-\bar{v} \in V$, jolle pätee $\bar{v} + (-\bar{v}) = \bar{0}$.
5. $a(\bar{v} + \bar{w}) = a\bar{v} + a\bar{w}$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w} \in V$ ja $a \in \mathbb{R}$.
6. $(a + b)\bar{v} = a\bar{v} + b\bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in V$ ja $a, b \in \mathbb{R}$.
7. $(ab)\bar{v} = a(b\bar{v})$ kaikilla $\bar{v} \in V$ ja $a, b \in \mathbb{R}$.
8. $1\bar{v} = \bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in V$.

Vektoriavaruus

Oletetaan, että joukossa V on määritelty yhteenlasku ja skalaarikertolasku jollakin tavalla. Jos alla listatut ehdot pätevät kaikilla $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in V$ ja $a, b \in \mathbb{R}$, joukkoa V kutsutaan *vektoriavaruudeksi* ja sen alkioita *vektoreiksi*.

1. $\bar{v} + \bar{w} = \bar{w} + \bar{v}$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w} \in V$.
2. $(\bar{v} + \bar{w}) + \bar{u} = \bar{v} + (\bar{w} + \bar{u})$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in V$.
3. On olemassa niin kutsuttu *nollavektori* $\bar{0} \in V$, jolle pätee $\bar{v} + \bar{0} = \bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in V$.
4. Jokaisella vektorilla $\bar{v} \in V$ on niin kutsuttu *vastavektori* $-\bar{v} \in V$, jolle pätee $\bar{v} + (-\bar{v}) = \bar{0}$.
5. $a(\bar{v} + \bar{w}) = a\bar{v} + a\bar{w}$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w} \in V$ ja $a \in \mathbb{R}$.
6. $(a + b)\bar{v} = a\bar{v} + b\bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in V$ ja $a, b \in \mathbb{R}$.
7. $(ab)\bar{v} = a(b\bar{v})$ kaikilla $\bar{v} \in V$ ja $a, b \in \mathbb{R}$.
8. $1\bar{v} = \bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in V$.

Milloin osajoukko on vektoriavaruus?

Halutaan tutkia, onko vektoriavaruuden osajoukko vektoriavaruus.
Mitkä vektoriavaruuden ehtoja pitää tutkia?

Aliavaruus

Määritelmä

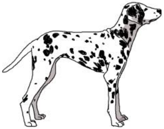
Olkoon V vektoriavaruus. Sen osajoukko W on vektoriavaruuden V *aliavaruus*, jos seuraavat ehdot pätevät:

(a) $\bar{w} + \bar{u} \in W$ kaikilla $\bar{w}, \bar{u} \in W$

(b) $r\bar{w} \in W$ kaikilla $r \in \mathbb{R}$ ja $\bar{w} \in W$

(c) $\bar{0} \in W$.

Aliavaruuden luonnehdinta



Aliavaruus on vektoriavaruus toisen vektoriavaruuden sisässä.
(Laskutoimitusten pitää olla samat.)

Totta vai tarua?

(a) Jos yhtälöryhmän matriisissa on vapaa muuttuja, yhtälöryhmällä on äärettömän monta ratkaisua.
(b) Jos matriisin alin nollasta poikkeava rivi ei ole epätosi, vastaavalla yhtälöryhmällä on ratkaisuja.
(c) Jos yhtälöryhmän matriisi voidaan muuttaa redusoiduksi porrasmatriisiksi, yhtälöryhmällä on täsmälleen yksi ratkaisu.
(d) Jos yhtälöryhmän kerroinmatriisin determinantti on nolla, yhtälöryhmällä on äärettömän monta ratkaisua.

Lisätehtävä: Jos jokin väitteistä ei ole totta, miten sen voisi muuttaa todeksi? (Tässä on tarkoitus muutta väitteen jos-osaa.)

Mene osoitteeseen `presemo.helsinki.fi/joh` ja äänestä.

Vastaus: Mikään väitteistä ei ole tosi.

Muista lunastaa kurssimateriaali!