Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II

29.10.2014

Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johanna Rämö, johanna.ramo@helsinki.fi

Käytännön asioita

- Anna kurssipalautetta ykkösosasta! (Tänään on vielä mahdollista antaa palautetta.)
- Ilmoittaudu kurssille.
- Käytä uutta kurssitunnusta (M=matriisilaskenta).
- Tiistaisin luennot klo 9–10.
- Pääaineopiskelija: Muista kannettavan/taulutietokoneen tilaus.

Kurssimateriaali

- Hinta 8 euroa.
- Ykkösosan monisteita on vielä jäljellä muutama. Sellaisen saa ostaa itselleen 5 euron hintaan.

Milloin osallistuit kurssille Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I?

- tänä syksynä
- syksyllä 2013
- syksyllä 2012
- avoimessa yliopistossa tänä tai viime kesänä
- avoimessa yliopistossa aiemmin
- joskus muulloin tai jossain muualla
- en ole suorittanut kurssia

Mene osoitteeseen `presemo.helsinki.fi/joh` ja äänestä.

Jos et osallistunut kurssin ykkösosaan tänä syksynä, lue läpi kurssisivu.

Oletko käynyt kurssin Johdatus yliopistomatematiikkaan?

Lineaarialgebran kurssi kannattaa ehdottomasti käydä joko **yhtä aikaa** kurssin Johdatus yliopistomatematiikkaan kanssa tai **sen jälkeen**.

Tutustu vieressä istuvaan ihmiseen

Siirry istumaan toisen ihmisen viereen. Kaikilla pitää olla pari, jonka kanssa työskennellä.

Jos et tunne pariasi, esittele itsesi.

Vektori on

(a) nuoli, jolla on suunta ja pituus.
(b) suure, jolla on suunta ja suuruus.
(c) origosta lähtevä nuoli.
(d) $ai + bj$
(e) (a, b)
(f) geenitekniikan apuväline.
(g) jotain muuta.
(h) En tiedä.

Mene osoitteeseen `presemo.helsinki.fi/joh` ja valitse vaihtoehto, joka on lähimpänä omaa näkemystäsi.

Avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektorien laskusääntöjä

Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in \mathbb{R}^n$ ja $a, b \in \mathbb{R}$. Tällöin

(a) $\bar{v} + \bar{w} = \bar{w} + \bar{v}$

(b) $(\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w} = \bar{u} + (\bar{v} + \bar{w})$

(c) $\bar{v} + \bar{0} = \bar{v}$

(d) $\bar{v} + (-\bar{v}) = \bar{0}$

(e) $a(\bar{v} + \bar{w}) = a\bar{v} + a\bar{w}$

(f) $(a + b)\bar{v} = a\bar{v} + b\bar{v}$

(g) $a(b\bar{v}) = (ab)\bar{v}$

(h) $1\bar{v} = \bar{v}$

Matriisien laskusääntöjä

Oletetaan, että $A, B, C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ja $a, b \in \mathbb{R}$. Tällöin

(a) $A + B = B + A$

(b) $A + (B + C) = (A + B) + C$

(c) $A + O = A$

(d) $A + (-A) = O$

(e) $a(A + B) = aA + aB$

(f) $(a + b)A = aA + bA$

(g) $(ab)A = a(bA)$

(h) $1A = A$.

Reaalilukujen laskusääntöjä

Oletetaan, että $v, w, u \in \mathbb{R}$ ja $a, b \in \mathbb{R}$. Tällöin

(a) $v + w = w + v$

(b) $(u + v) + w = u + (v + w)$

(c) $v + 0 = v$

(d) $v + (-v) = 0$

(e) $a(v + w) = av + aw$

(f) $(a + b)v = av + bv$

(g) $a(bv) = (ab)v$

(h) $1v = v$

Sana "vektori" saa nyt uuden, yleisemmän merkityksen.

Vektoriavaruus

Oletetaan, että joukossa V on määritelty yhteenlasku ja skalaarikertolasku jollakin tavalla. Jos alla listatut ehdot pätevät kaikilla $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in V$ ja $a, b \in \mathbb{R}$, joukkoa V kutsutaan *vektoriavaruudeksi* ja sen alkioita *vektoreiksi*.

1. $\bar{v} + \bar{w} = \bar{w} + \bar{v}$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w} \in V$.
2. $(\bar{v} + \bar{w}) + \bar{u} = \bar{v} + (\bar{w} + \bar{u})$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in V$.
3. On olemassa niin kutsuttu *nollavektori* $\bar{0} \in V$, jolle pätee $\bar{v} + \bar{0} = \bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in V$.
4. Jokaisella vektorilla $\bar{v} \in V$ on niin kutsuttu *vastavektori* $-\bar{v}$, jolle pätee $\bar{v} + (-\bar{v}) = \bar{0}$.
5. $a(\bar{v} + \bar{w}) = a\bar{v} + a\bar{w}$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w} \in V$ ja $a \in \mathbb{R}$.
6. $(a + b)\bar{v} = a\bar{v} + b\bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in V$ ja $a, b \in \mathbb{R}$.
7. $(ab)\bar{v} = a(b\bar{v})$ kaikilla $\bar{v} \in V$ ja $a, b \in \mathbb{R}$.
8. $1\bar{v} = \bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in V$.

Laskutoimitus

Määritelmässä lukee: "Oletetaan, että joukossa V on määritelty yhteenlasku ja skalaarikertolasku jollakin tavalla."

Kysymys: Onko yhteenlasku joukossa $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ määritelty laskutoimitus?

Erilainen laskutoimitus

Määritellään joukossa $\mathbb{R}^2$ yhteenlasku $\oplus$ ja skalaarikertolasku $\odot$ seuraavasti:

$$(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (x_1 + y_1 + 1, x_2 + y_2 - 1)$$
$$c \odot (x_1, x_2) = (cx_1, c^2 x_2)$$

Tutkitaan, onko $\mathbb{R}^2$ vektoriavaruus, kun laskutoimituksina ovat $\oplus$ ja $\odot$. Mikä vektori kelpaisi sen nollavektoriksi?

(a) Ei mikään.
(b) $(0, 0)$.
(c) $(-1, 1)$.
(d) $(1, -1)$.
(e) Kaikki edellä luetellut vektorit.

Mene osoitteeseen `presemo.helsinki.fi/joh` ja äänestä.

Lisätehtävä: Onko vektorilla $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}2$ vastavektoria?

Luennon jälkeen

- Nouda kurssimateriaalisi (8 euroa).
- Käy antamassa palautetta ykkösosasta.
- Ilmoittaudu kurssille.
- Ryhdy tekemään tehtäviä.