Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2014
Harjoitus 6

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 5.12.2013 klo 19.30
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 19.12.2013 klo 19.30

Tehtäväsarja I

1. Funktioavaruudella $\mathcal{F}$ on aliavaruus $\mathcal{F}_d = \{f \in \mathcal{F} \mid f \text{ on derivoituva}\}$. Lisäksi derivointikuvaus
$$D\colon \mathcal{F}_d \to \mathcal{F}, \quad f \mapsto f'$$
on lineaarikuvaus.

   (a) Määritä seuraavien vektoreiden kuvavektorit kuvauksessa D:
      i. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 4x + 6$
      ii. $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sin x$.

   (b) Keksi kolme vektoria, jotka ovat kuvan $\operatorname{Im} D$ alkioita.

   (c) Keksi kolme vektoria, jotka ovat ytimen $\operatorname{Ker} D$ alkoita.

   (d) Määritä ydin $\operatorname{Ker} D$. (Perustelujen ei tarvitse olla tarkat.)

2.* Lineaarikuvaus $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ projisoi tason vektorit suoralle $\operatorname{span}((-4,1))$. Etsi lineaarikuvauksen ominaisarvot ja niitä vastaavat ominaisavaruudet ilman, että määrität kuvauksen matriisia. Voit nojata perusteluissasi piirrokseen. Perusteluiden ei tarvitse olla tarkat.

Tehtäväsarja II

Tutustu kurssimateriaalin lukuun 24.3, jossa käsitellään aliavaruuden kohtisuoraa komplementtia.

3. (a) Tutkitaan avaruuden $\mathbb{R}^2$ aliavaruutta $W = \{(2a, 3a) \mid a \in \mathbb{R}\}$. Mitkä seuraavista vektoreista ovat kohtisuorassa komplementissa $W^\perp$? (Sisätulona on tavallinen pistetulo.)
$$\text{(i) } \bar{v} = (-6, 4) \qquad \text{(ii) } \bar{v} = (1, 1)$$

   (b) Piirrä kuva aliavaruudesta W sekä sen kohtisuorasta komplementista $W^\perp$. Perusteluja ei tarvita.

4. Pohdi ilman laskuja, miltä näyttää seuraavissa tapauksissa avaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruuden W kohtisuora komplementti $W^\perp$. Tarkkoja perusteluja ei tarvita.

   (a) $W = \operatorname{span}((0,2,0),(1,1,0))$ (b) $W = \operatorname{span}((0,2,0))$ (c) $W = \mathbb{R}^3$

5. Tässä tehtävässä tutkitaan avaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruutta

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -4x + y + 2z = 0\}.$$

   (a) Etsi virittäjät aliavaruudelle W.
   (b) Kuvaile omin sanoin, miltä W näyttää.
   (c) Keksi vektori $\bar{n} \in \mathbb{R}^3$, jolle pätee $W = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \bar{n} \cdot \bar{x} = 0\}$.
   (d) Miten aliavaruuden W ortogonaalinen komplementti ja vektori $\bar{n}$ liittyvät toisiinsa?

   Yhtälöä $-4x + y + 2z = 0$ kutsutaan tason W *normaalimuotoiseksi yhtälöksi*. Vektoria $\bar{n}$ kutsutaan tason W *normaaliksi*.

6.* Polynomiavaruudessa $\mathcal{P}_1$ voidaan määritellä sisätulo seuraavalla kaavalla:

$$\langle ax + b, cx + d\rangle = 2ac + 3bd \quad \text{kaikilla } ax + b, cx + d \in \mathcal{P}_1.$$

   Mitkä seuraavista polynomeista kuuluvat aliavaruuden $W = \{ax + a \mid a \in \mathbb{R}\}$ kohtisuoraan komplementtiin $W^\perp$?

   a) $x - 1$ b) $3x - 2$

   Perustele vastauksesi huolellisesti.

Tehtäväsarja III

Tutustu kurssimateriaalin kappaleeseen 24.2, jossa kerrotaan ortogonaalisista jonoista.

7. Onko avaruuden $\mathbb{R}^3$ jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ ortogonaalinen, jos

   (a) $\bar{v}_1 = (4, -1, 1)$, $\bar{v}_2 = (-1, 0, 4)$ ja $\bar{v}_3 = (-4, -17, -1)$
   (b) $\bar{v}_1 = (1, 0, -1)$, $\bar{v}_2 = (-1, 2, -1)$ ja $\bar{v}_3 = (1, -1, 1)$?

Tutustu kurssimateriaalin lukuun 24.4, jossa käsitellään projektiota. Nyt emme enää projisoi pelkästään yhden vektorin virittämille aliavaruuksille, vaan aliavaruudet voivat olla useampiulotteisia.

8. Kaverisi tutki vektoriavaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruutta $W = \operatorname{span}(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$, missä $\bar{w}_1 = (2, -2, 1)$ ja $\bar{w}_2 = (1, -1, 5)$. Hän halusi laskea vektorin $\bar{v} = (1, 2, 3)$ projektion tälle aliavaruudelle. Ensin kaverisi laski projektion näin:

$$\operatorname{proj}_W(\bar{v}) = \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}_1}{\bar{w}_1 \cdot \bar{w}_1}\bar{w}_1 + \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}_2}{\bar{w}_2 \cdot \bar{w}_2}\bar{w}_2 = \frac{1}{9}(2, -2, 1) + \frac{14}{27}(1, -1, 5) = \left(\frac{20}{27}, -\frac{20}{27}, \frac{71}{27}\right).$$

   Tutkiessaan asiaa tarkemmin, hän huomasi, että aliavaruudelle voi löytää monta erilaista kantaa. Esimerkiksi vektorit $\bar{u}_1 = (2, -2, 1)$ ja $\bar{u}_2 = (-1, 1, 4)$ muodostavat avaruuden W kannan. Sen jälkeen hän laski projektion toisella tavalla:

$$\operatorname{proj}_W(\bar{v}) = \frac{\bar{v} \cdot \bar{u}_1}{\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_1}\bar{u}_1 + \frac{\bar{v} \cdot \bar{u}_2}{\bar{u}_2 \cdot \bar{u}_2}\bar{u}_2 = \frac{1}{9}(2, -2, 1) + \frac{13}{18}(-1, 1, 4) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 3\right).$$

   Miksi vastaukset eivät ole samat? Kumpi niistä on oikea?

Tehtäväsarja IV

Tässä tehtäväsarjassa tutkitaan avaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruutta $W = \operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$, missä $\bar{v}_1 = (1, -1, -1)$ ja $\bar{v}_2 = (0, 3, 3)$.

9. Etsi aliavaruudelle W ortogonaalinen kanta seuraavasti: Valitse ensimmäiseksi kantavektoriksi $\bar{v}_1$ ja etsi sitten vektori, joka on ortogonaalinen vektorin $\bar{v}_1$ kanssa. Käytä tässä apuna projektiota $\operatorname{proj}_{\bar{v}_1}(\bar{v}_2)$.

10.* Merkitään $\bar{a} = (2, -1, 4)$. Määritä projektio $\operatorname{proj}_W(\bar{a})$.

11. Jatkoa edelliseen tehtävään. Kirjoita vektori $\bar{a}$ summana kahdesta vektorista, joista toinen on aliavaruuden W ja toinen aliavaruuden $W^\perp$ alkio.

Grande finale

Valitse seuraavista tehtävistä vähintään kolme. Jäljelle jäävät ovat ylimääräisiä tehtäviä.

12. Oletetaan, että A on $n \times n$-matriisi. Osoita aliavaruuden määritelmän nojalla, että joukko $\{\bar{v} \in \mathbb{R}^n \mid A\bar{v} = 2\bar{v}\}$ on avaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruus.

13. Keksi surjektiivinen lineaarikuvaus avaruudelta $\mathbb{R}^3$ avaruudelle $\mathbb{R}^2$. Perustele vastauksesi. Pystytkö keksimään neljä erilaista kuvausta?

14. Autiomaassa elää kojootteja ja maantiekiitäjiä. Niiden kantojen vuosittaiset koot riippuvat toisistaan seuraavasti: Olkoon $K(n)$ kojoottien lukumäärä vuonna n ja $M(n)$ maantiekiitäjien lukumäärä vuonna n. Tällöin

$$K(n+1) = 0{,}86K(n) + 0{,}08M(n)$$

ja

$$M(n+1) = -0{,}12K(n) + 1{,}14M(n).$$

(a) Keksi matriisi A, jolle pätee

$$A \begin{bmatrix} K(n) \\ M(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K(n+1) \\ M(n+1) \end{bmatrix}.$$

(b) Matriisilla A on ominaisarvo 1,1, jota vastaa ominaisavaruus $\operatorname{span}((1/3, 1))$. Jos eräänä vuonna kojootteja on 6 ja maantiekiitäjiä 18, mikä on tilanne seuraavana vuonna? Entä viiden vuoden kuluttua? Entä 20 vuoden kuluttua?

15. Oletetaan, että V ja W ovat vektoriavaruuksia, joille pätee $\dim(V) < \dim(W)$. Osoita, että ei ole olemassa surjektiivista lineaarikuvausta avaruudelta V avaruudelle W. (Vihje: Dimensiolause)

16. Oletetaan, että V on äärellisulotteinen sisätuloavaruus ja U sen aliavaruus. Oletetaan lisäksi, että $\bar{v} \in V$. Osoita, että $\bar{v} \in U$, jos ja vain jos $\operatorname{proj}_U(\bar{v}) = \bar{v}$.

17. Tutki kurssin aihealueista koostuvaa oppimistavoitematriisia, joka löytyy kurssisivulta kohdasta ”Kurssin tiedot”. Mitkä asiat osaat riittävän hyvin? Mitä pitää vielä treenata? Listaa tähän ne aiheet, joiden harjoitteluun sinun tulisi omasta mielestäsi erityisesti panostaa.