**Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II**
**Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos**
**Syksy 2014**
**Harjoitus 5**

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 28.11.2014 klo 19.30
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 12.12.2014 klo 19.30

*Viimeisen tehtäväsarjan tehtävistä on jaossa tuplapisteet. Niitä ei siis kannata jättää tekemättä.*

## Tehtäväsarja I

Isomorfismi on bijektiivinen lineaarikuvaus. Isomorfismeja käsitellään luvussa 21.
Tutkitaan yläkolmiomatriiseista muodostuvaa vektoriavaruutta $U = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_3 \end{bmatrix} \mid a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\}$ sekä kuvausta $L\colon U \to \mathbb{R}^3\colon \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_3 \end{bmatrix} \to (a_1, a_2, a_3)$.

1. Osoita, että kuvaus $L$ on lineaarinen.

2.* Määritä kuvauksen $L$ ydin ja kuva.

3. (a) Osoita edellisen tehtävän avulla, että $L$ on isomorfismi.
   (b) Olet nyt osoittanut, että vektoriavaruudet $U$ ja $\mathbb{R}^3$ ovat isomorfiset. Selitä omin sanoin, miten sen voi arvata katsomalla vektoriavaruuksien $U$ ja $\mathbb{R}^3$ määritelmiä.

## Tehtäväsarja II

Lineaarikuvauksen ytimen ja kuvan dimensiot riippuvat toisistaan. Muun muassa tätä käsitellään luvussa 22.

Tämän tehtäväsarjan tehtävissä tarkastellaan lineaarikuvausta

$$L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2, \quad L(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4,\ x_1 + 2x_3 - x_4).$$

4. Määritä ydin $\operatorname{Ker} L$ ja kuva $\operatorname{Im} L$. Etsi niille virittäjät.

5. (a) Mikä on ytimen $\ker L$ dimensio?
   (b) Mikä on kuvan $L$ dimensio? (Dimensiolauseesta on apua.)
   (c) Onko b-kohdan ratkaisu ristiriidassa tehtävässä 4 saatujen tulosten kanssa?

## Tehtäväsarja III

Sisätulo yleistää pistetulon käsitettä. Sitä käsitellään kurssimateriaalin luvussa 24.

Vektoriavaruuteen $\mathbb{R}^2$ voidaan määritellä sisätulo asettamalla $\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = v_1 w_1 + (v_2 w_2)/4$. Seuraavissa tehtävissä tarkastellaan tätä sisätuloa.

6. Tutkitaan vektoreita $\bar{a} = (2, 4)$, $\bar{b} = (-1, 2)$ ja $\bar{c} = (-2, 4)$ Mitkä niistä ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, kun sisätulo määritellään edellä annetulla kaavalla?

7. (a) Määritä ne vektorit $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$, joilla $\|\bar{x}\| = 1$.
   (b) Edellä määrittämäsi vektorit muodostavat tutkittavan sisätuloavaruuden yksikköympyrän. Hahmottele kuva tästä joukosta.

**Tehtäväsarja IV**

Tarkastellaan vektoriavaruutta $C([0, 1]) = \{f : [0, 1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ on jatkuva}\}$. Tässä avaruudessa voidaan määritellä sisätulo kaavalla $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

8. Tutkitaan funktioita $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 1$ ja $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = -4x$.
   (a) Määritä sisätulo $\langle f, g\rangle$.
   (b) Määritä projektio $\mathrm{proj}_g(f)$. (Sisätuloavaruuden projektio määritellään samalla tavalla kuin avaruuden $\mathbb{R}^n$ tavallinen projektio.)

9. Keksi kaksi nollasta poikkeavaa avaruuden $C([0, 1])$ alkiota, jotka ovat ortogonaaliset eli kohtisuorassa toisiaan vastaan. Voit halutessasi käyttää hyväksi edellistä tehtävää.

**Tehtäväsarja V**

Tässä tehtäväsarjassa kerrataan lineaarikuvauksen ominaisarvon ja ominaisvektorin käsitettä.

10.* Oletetaan, että lineaarikuvauksella $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ on ominaisarvo $\lambda_1 = 1/2$, jota vastaa ominaisvektori $\bar{v}_1 = (0, 1, -1)$, ja ominaisarvo $\lambda_2 = -3$, jota vastaa ominaisvektori $\bar{v}_2 = (-2, 3, 2)$. Määritä $L(2, -1, -4)$.

11. Tässä tehtävässä tutustutaan lauseeseen 23.8 ja sen todistukseen. (Jos haluat hiukan enemmän haastetta, voit valita minkä tahansa lauseen luvusta 22.)
   (a) Tarkastele lausetta 23.8 ja kirjaa muistiin havaintosi. Todistuksen voi vielä tässä vaiheessa jättää huomiotta.
      - Mitkä ovat lauseessa mainittujen käsitteiden määritelmät?
      - Selitä omin sanoin, mitä lause sanoo.
   (b) Ryhdy sitten tutkimaan lauseen todistusta virke virkkeeltä.
      - Jos virke sisältää oletuksia, miksi niitä on tehty?
      - Jos virke sisältää väitteitä, mihin ne perustuvat? Nojautuvatko ne kenties määritelmiin, lauseisiin tai todistuksessa aiemmin todettuihin asioihin?
      - Mikä on virkkeen keskeinen idea?
      - Jos jokin askel on ristiriidassa oman käsityksesi kanssa tai et ymmärrä sitä, kirjaa asia muistiin.

**Tehtäväsarja VI**

12. Oletetaan, että $a$, $b \in \mathbb{R}$. Vektoria voidaan siirtää tasossa vektorin $(a, b)$ verran kuvauksella $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (x_1 + a, x_2 + b)$.

    (a) Onko $f$ lineaarikuvaus?

    (b) Onko olemassa matriisi $A$, jolle pätee $f(\bar{x}) = A\bar{x}$ kaikilla $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$?

13. Ohjaat robottikättä, joka lähtee origosta ja ulottuu pisteeseen $(2, 0)$. Robottikättä liikutetaan matriisikertolaskulla. Harjoituksen 3 tehtävässä 4 tutkittiin, kuinka robottikättä voi kiertää annetun kulman verran. Nyt sinun pitäisi siirtää robottikättä vektorin $(-1/3, 1)$ verran.

    Edellisen tehtävän nojalla ei ole olemassa $2 \times 2$ -matriisia, jolla siirron voisi tehdä. Avuksi tulevat niin sanotut homogeeniset koordinaatit. Homogeenisissa koordinaateissa vektori $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ esitetään avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektorina $(x_1, x_2, 1)$. Oletetaan, että $a$, $b$, $\varphi \in \mathbb{R}$ ja tarkastellaan matriiseja

    $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

    (a) Laske kuvavektorit $L_A(x_1, x_2, 1)$ ja $L_B(x_1, x_2, 1)$.

    (b) Siirrä robottikättä homogeenisten koordinaattien avulla vektorin $(-1/3, 1)$ verran. Mihin pisteeseen se silloin ulottuu?

    (c) Millainen on matriisi, jonka avulla robottikättä saadaan kierrettyä kulman $\varphi$ verran origon ympäri ja sen jälkeen siirrettyä vektorin $(a, b)$ verran?

**Tehtäväsarja VII**

Kirjoita tämän tehtäväsarjan ratkaisut *eri paperille kuin muut ratkaisut.* Nido paperi kuitenkin yhteen muiden ratkaisujen kanssa. Muista myös kirjoittaa paperiin *kurssitunnuksesi.* Opiskelijoiden ratkaisut näihin tehtäviin kerätään talteen ja niitä käytetään kurssia koskevassa tutkimuksessa. Tehtäväsarjan tehtävistä saa tuplapisteet: kukin tehtävä vastaa kahta tavallista tehtävää.

14. (a) Oletetaan, että $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ on lineaarikuvaus, jolle pätee $T(1, 0) = (1, 5, 3)$ ja $T(1, 1) = (4, 0, 1)$. Etsi matriisi, jonka määräämä lineaarikuvaus $T$ on.

    (b) Tarkista, että löytämäsi matriisi kuvaa vektorit $(1, 0)$ ja $(1, 1)$ oikein.

15. Tiedetään, että lineaarikuvauksella $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ on ominaisarvo $\lambda \in \mathbb{R}$, jota vastaavat ominaisvektorit $\bar{v}_1 = (5, 2, -1, 0)$ ja $\bar{v}_2 = (-2, 0, -3, 4)$. Keksi ominaisarvoa $\lambda$ vastaava ominaisvektori, joka ei ole yhdensuuntainen kummankaan vektoreista $\bar{v}_1$ ja $\bar{v}_2$ kanssa. Perustele vastauksesi.

16. Oletetaan, että $L\colon V \to U$ on injektiivinen lineaarikuvaus. Oletetaan lisäksi, että avaruuden $V$ jono $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n)$ on vapaa. Osoita, että myös jono $(L(\bar{v}_1), \ldots, L(\bar{v}_n))$ on vapaa.

**Ylimääräinen tehtävä**

Tämä tehtävä on hieman haastavampi. Sillä voi korvata minkä tahansa tähdettömän tehtävän. Huom! Älä kirjoita tehtävää samalle paperille kuin edellisen tehtäväsarjan tehtäviä.

17. Lineaarikuvaus $L$ peilaa tason vektorit suoran $\operatorname{span}((2, 3))$ suhteen. Diagonalisoi lineaarikuvauksen $L$ standardimatriisi. (Tätä varten sinun ei tarvitse määrittää standardimatriisia.) Päättele diagonalisoinnin perusteella, miltä standardimatriisi näyttää.