Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2014
Harjoitus 4

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 21.11.2014 klo 19.30
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 5.12.2014 klo 19.30

Tehtäväsarja I

1. Olkoon $T\colon \mathcal{P} \to \mathbb{R}_2$ sellainen lineaarikuvaus, että $T(x+1) = (0,4)$ ja $T(x^2-1) = (5,5)$. Määritä $T(3x^2+3x)$.

2.* Oletetaan, että $\bar{w} \in \mathbb{R}^n$ ja $\bar{w} \neq \bar{0}$. Osoita, että projektiokuvaus
$$P\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad P(\bar{x}) = \mathrm{proj}_{\bar{w}}(\bar{x})$$
on lineaarinen. (*Neuvo:* Älä kirjoita vektorien komponentteja näkyviin.)

3.* Etsi matriisi, jonka määräämä lineaarikuvaus ensin peilaa tason vektorit pystyakselin suhteen ja sitten kiertää niitä origon ympäri $180°$ vastapäivään.

Tehtäväsarja II

Tutustu materiaalin lukuun 20, jossa selviää, mitä ovat lineaarikuvauksen ydin ja kuva.

4. Tutkitaan lineaarikuvausta $L\colon \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^2$, $L(a+bx+cx^2) = (a-b, b+c)$. Mitkä seuraavista polynomeista kuuluvat kuvauksen L ytimeen $\mathrm{Ker}\, L$?

   i. $1+x$ ii. $x-x^2$ iii. $1+x-x^2$

5. Tarkastellaan lineaarikuvausta
$$T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad T(x_1,x_2,x_3) = (x_1+x_2,\ x_1+x_2+2x_3,\ -2x_1-2x_2).$$
   (a) Määritä kuvauksen T ydin $\mathrm{Ker}\, T$.
   (b) Onko lineaarikuvaus T injektio?
   (c) Selitä omin sanoin, mitä b-kohdan vastaus tarkoittaa.

6. Tutkitaan vielä lineaarikuvausta $L\colon \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^2$, $L(a+bx+cx^2) = (a-b, b+c)$. Mitkä seuraavista vektoreista kuuluvat kuvauksen L kuvaan $\mathrm{Im}\, L$?

   i. $(0,0)$ ii. $(1,0)$ iii. $(0,1)$

7. Tarkastellaan uudelleen lineaarikuvausta
$$T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad T(x_1,x_2,x_3) = (x_1+x_2,\ x_1+x_2+2x_3,\ -2x_1-2x_2).$$
   (a) Määritä kuvauksen T kuva $\mathrm{Im}\, T$ ja etsi sille virittäjät.
   (b) Onko lineaarikuvaus T surjektio?
   (c) Selitä omin sanoin, mitä b-kohdan vastaus tarkoittaa.

Tehtäväsarja III

8. Tarkastellaan lineaarikuvausta $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, joka kiertää tason vektoreita 90° myötäpäivään. Tutkitaan lisäksi aliavaruutta $W = \operatorname{span}((-1,1))$. Piirrä kuva aliavaruudesta W ja päättele kuvan perusteella, miltä joukko LW näyttää. Etsi virittäjävektorit joukolle LW.

Tehtävissä 9–12 tutkitaan seuraavaa tulosta:

Tulos: Oletetaan, että $L\colon V \to U$ on lineaarikuvaus. Oletetaan lisäksi, että $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k \in V$ ja merkitään $W = \operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$. Tällöin $LW = \operatorname{span}(L(\bar{v}_1), \ldots, L(\bar{v}_k))$.

9. Vertaa tulosta tehtävän 8 ratkaisuun ja tarkista, että tulos pitää siinä tapauksessa paikkansa.

10.* Selitä omin sanoin ilman matemaattisia symboleja, mitä tulos kertoo. Lyhyt ja ytimekäs vastaus riittää.

11. Todista tulos.

12. Jatketaan kuvauksen

$$L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad L(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2,\ x_1 + x_2 + 2x_3,\ -2x_1 - 2x_2)$$

tutkimista. Merkitään $W = \operatorname{span}((1,2,1),(1,3,0))$. Määritä joukko LW ja etsi sille virittäjät.

Tehtäväsarja IV

Lineaarikuvauksille voidaan määritellä ominaisarvon käsite samalla tavalla kuin matriiseille. Tutustu lukuun 23, jossa käsitellään lineaarikuvauksen ominaisarvoja.

13. Tiedetään, että lineaarikuvauksella $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ on ominaisvektori $\bar{v} = (0,4,-2)$. Mikä seuraavista vektoreista voisi olla $L(\bar{v})$ ja mikä ei? Perustele vastauksesi ominaisarvon määritelmän avulla.

$$\bar{a} = (0,2,-1), \qquad \bar{b} = (0,-12,6), \qquad \bar{c} = (1,1,1)$$

Seuraavassa tehtävässä on apua erityisesti alaluvusta 23.2.

14. Päättele seuraavissa tapauksissa lineaarikuvauksen $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ominaisarvot ilman että määrität kuvauksen matriisia. Vetoa perusteluissai kuvaan, älä laskuihin. Perustelujen ei tarvitse olla täsmällisiä.
    (a) Lineaarikuvaus T on venytys nelinkertaiseksi vaakasuunnassa.
    (b) Lineaarikuvaus T peilaa tason vektorit suoran $\operatorname{span}((1,2))$ suhteen.

Ominaisvektorit muodostavat ominaisavaruuksia. Niistä kerrotaan luvussa 23.3.

15. Määritä edellisen tehtävän ominaisarvoja vastaavat ominaisavaruudet. Etsi ominaisavaruuksille virittäjät. Voit jälleen perustella vastauksesi kuvan avulla.

Tehtäväsarja V

16. Tee käsitekartta, jossa ovat ainakin alla listatut käsitteet. Selitä kaaviossasi käsitteiden väliset yhteydet.

    aliavaruuden kuva, injektio, kuva, lineaarikuvaus, matriisi, ominaisarvo, ominaisvektori, ominaisavaruus, surjektio, ydin

Tehtäväsarja VI

17. Avaruudella $\mathbb{R}^2$ on kannat $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ ja $\mathcal{T}$. Tiedetään, että erään vektorin $\bar{v} \in \mathbb{R}^2$ koordinaattivektori kannan S suhteen on $[\bar{v}]_{\mathcal{S}} = (4, 1)$. Lisäksi seuraavat kannanvaihtomatriisit ovat tiedossa:
$$P_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{T}\leftarrow\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$
    Määritä
$$\text{(a) } [\bar{v}]_{\mathcal{T}} \qquad \text{(b) } [\bar{v}]_{\mathcal{R}} \qquad \text{(c) } P_{\mathcal{T}\leftarrow\mathcal{R}}.$$

Ylimääräinen tehtävä

Tämä tehtävä on hieman haastavampi. Sillä voi korvata minkä tahansa tähdettömän tehtävän.

18. Tutkitaan funktioita
$$\begin{aligned} &f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x, \\ &g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = x^2 \quad \text{ja} \\ &h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = e^x. \end{aligned}$$
    Onko funktioavaruuden F jono (f, g, h) vapaa?