

Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2014
Harjoitus 3

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 14.11.2014 klo 19.30
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 28.11.2014 klo 19.30

Tehtäväsarja I

1. Tässä tehtävässä käsitellään kuvausta

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{P}_1, \quad T(a, b) = (a - b) + (a + b)x.$$

- (a) Miltä näyttävät aliavaruuden \mathcal{P}_1 alkiot?
(b) Määritä vektorin $(-4, 6)$ kuvavektori kuvauksessa T .
(c) Onko T lineaarikuvaus?

- 2.* Tarkastellaan kuvausta

$$S: \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}, \quad S \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \right) = a_{11}a_{22}.$$

Onko S lineaarikuvaus?

3. Onko olemassa lineaarikuvausta $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{P}_2$, jolla $L(2, 1, 0) = 1 + x$, $L(3, 0, 2) = 2 - x + x^2$ ja $L(0, 6, -8) = -2 + 2x^2$?

Tehtäväsarja II

4. Seuraava tehtävä valottaa lineaarialgebran käyttömahdollisuuksia robotiikassa ja tietokonegrafiikassa.

Esimerkissä 19.9 mainitaan, että vektoreita voidaan kiertää kulman φ verran origon ympäri lineaarikuvauksella, joka on matriisin

$$\begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

määräämä. Ohjaat robottikättä, joka lähtee origosta ja ulottuu pisteeseen $(2, 0)$. Käytä edellä mainittua lineaarikuvausta ja kierrä robotin kättä 120° origon ympäri positiiviseen kiertosuuntaan eli vastapäivään. Missä pisteessä robottikäden pää tämän jälkeen on?

5. Tiedetään, että lineaarikuvaus $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ peilaa tason vektorit suoran $\text{span}((1, 1))$ suhteen.
- (a) Määritä kantavektorien $\bar{e}_1 = (1, 0)$ ja $\bar{e}_2 = (0, 1)$ kuvavektorit kuvauksessa L .
(b) Oletetaan, että $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Määritä a-kohdan avulla $L(x_1, x_2)$.
(c) Etsi b-kohdan perusteella matriisi A , jonka määräämä kuvaus L on.

- (d) Miten matriisissa näkyvät kuvavektorit $L(\bar{e}_1)$ ja $L(\bar{e}_2)$?
- (e) Tarkista, että matriisi A toimii halutulla tavalla eli että $A\bar{e}_1 = L(\bar{e}_1)$ ja $A\bar{e}_2 = L(\bar{e}_2)$.

Tässä vaiheessa teemme hypyn lukuun 22.1, jossa nähdään, että jokainen lineaarikuvaus avaruudelta \mathbb{R}^m avaruudelle \mathbb{R}^n on jonkin matriisin määräämä. Luvun todistuksia ei ole tarpeellista vielä tässä vaiheessa lukea tarkasti läpi.

6. Etsi matriisi, jonka määräämä lineaarikuvaus projisoi tason vektorit suoralle $\text{span}((1, -1))$. (Neuvo: Käytä hyväksesi luvun 22 oppeja ja tehtävän 5 oivalluksia.)
7. Etsi edellisten tehtävien avulla matriisi, jonka määräämä lineaarikuvaus peilaa ensin tason vektorit suoran $\text{span}((1, 1))$ suhteen ja sen jälkeen projisoi ne suoralle $\text{span}((1, -1))$.

Tehtäväsarja III

8. (a) Osoita, että $\mathcal{B} = ((1, 1, 0), (1, 2, 1))$ on avaruuden $W = \text{span}((1, 1, 0), (2, 3, 1), (0, 1, 1))$ kanta.
- (b) Mikä on avaruuden W dimensio? Kuvaile omin sanoin, miltä W näyttää.
- 9.* Jatkoa edelliseen tehtävään. Tee seuraavista kohdista ne, jotka on mahdollista ratkaista. Jos ratkaiseminen ei ole mahdollista, kerro, mistä se johtuu.
- (a) Etsi vektori $\bar{v} \in W$, jolle pätee $[\bar{v}]_{\mathcal{B}} = (4, -6)$.
- (b) Etsi vektori $\bar{v} \in W$, jolle pätee $[\bar{v}]_{\mathcal{B}} = (4, -6, 0)$.
- (c) Etsi vektori $\bar{v} \in W$, jolle pätee $[\bar{v}]_{\mathcal{B}} = (4, -6, 1)$.
- (d) Etsi vektori $\bar{v} \in W$, jolle pätee $[\bar{v}]_{\mathcal{B}} = (4, -6, 1, 2)$.

Tehtäväsarja IV

10. Merkitään $\bar{v}_1 = (3, 3)$ ja $\bar{v}_2 = (2, 1)$. Nyt $\mathcal{S} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ on avaruuden \mathbb{R}^2 kanta. Tutkitaan lisäksi vektoria $\bar{b} = (-5, -1)$.
- (a) Määritä koordinaattivektori $[\bar{b}]_{\mathcal{S}}$.
- (b) Havainnollista vektoria \bar{b} koordinaatistossa, jonka akselit ovat vektorien \bar{v}_1 ja \bar{v}_2 suuntaisia. Miten kuvasta välittyy koordinaattivektori $[\bar{b}]_{\mathcal{S}}$?
- (c) Tutkitaan sitten luonnollisen kannan \mathcal{E} vektoreita $\bar{e}_1 = (1, 0)$ ja $\bar{e}_2 = (0, 1)$. Määritä koordinaattivektorit $[\bar{e}_1]_{\mathcal{E}}$ ja $[\bar{e}_2]_{\mathcal{E}}$ sekä $[\bar{e}_1]_{\mathcal{S}}$ ja $[\bar{e}_2]_{\mathcal{S}}$.
- (d) Muodosta matriisi P , jonka sarakkeina ovat $[\bar{e}_1]_{\mathcal{S}}$ ja $[\bar{e}_2]_{\mathcal{S}}$.
- (e) Mitä matriisilla P kertominen tekee koordinaattivektoreille $[\bar{e}_1]_{\mathcal{E}}$ ja $[\bar{e}_2]_{\mathcal{E}}$? Entä koordinaattivektorille $[\bar{b}]_{\mathcal{E}}$?

Tutustu kannanvaihtomatriiseihin, jotka esitellään luvussa 18. Kannanvaihtomatriisilla kertomalla yhden kannan suhteen kirjoitettu koordinaattivektori voidaan muuttaa toisen kannan suhteen kirjoitetuksi koordinaattivektoriksi.

11. Tutkitaan avaruuden \mathbb{R}^2 kantoja $\mathcal{S} = ((3, 3), (2, 1))$ ja $\mathcal{T} = ((1, 2), (1, -1))$.
- (a) Määritä kannanvaihtomatriisi $P_{\mathcal{T} \leftarrow \mathcal{S}}$ kannasta \mathcal{S} kantaan \mathcal{T} .
- (b) Erään vektorin koordinaatit kannan \mathcal{S} suhteen ovat 4 ja -10 . Mitkä ovat tämän vektorin koordinaatit kannan \mathcal{T} suhteen?

Tehtäväsarja V

12.* Tutki aliavaruuden määritelmän avulla, onko joukko $W = \{p \in \mathcal{P} \mid p = 0 \text{ tai } \deg(p) = 2\}$ polynomiavaruuden \mathcal{P} aliavaruus.

13. Oletetaan, että V on vektoriavaruus, jolla on aliavaruudet W ja U . Aliavaruuksien W ja U summa on joukko

$$W + U = \{w + u \mid w \in W, u \in U\}.$$

(a) Tarkastellaan avaruuden \mathbb{R}^3 aliavaruuksia $W = \text{span}(\bar{e}_1)$ ja $U = \text{span}(\bar{e}_2)$. Määritä $W + U$. Miltä se näyttää?

(b) Osoita, että jos W ja U ovat avaruuden V aliavaruuksia, myös summa $W + U$ on avaruuden V aliavaruus.

Ylimääräinen tehtävä

14. Edellisessä tehtävässä osoitettiin, että kahden aliavaruuden summa on aina aliavaruus. Millä muilla tavoilla kahdesta aliavaruudesta voidaan muodostaa uusia aliavaruuksia? (Vihje: Voit miettiä esimerkiksi joukko-operaatioita.)