Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2014
Harjoitus 2

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 7.11.2014 klo 19.30
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 21.11.2014 klo 19.30

Tehtäväsarja I

Jatka tutustumista lukuihin 17 ja 18, joissa käsitellään vapautta ja kantaa.

Tehtävissä 1–3 tarkastellaan matriiseja

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \; A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \; A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \; A_4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Onko jono (A_1, A_2, A_3, A_4) vapaa? Käytä vapauden määritelmää 17.1.
2. Palauta mieleesi kannan määritelmä 18.1. Tutustu myös lauseeseen 18.13.
   (a) Mikä on avaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ dimensio?
   (b) Onko jono (A_1, A_2, A_3, A_4) vektoriavaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ kanta?
   (c) Virittävätkö vektorit A_1, A_2, A_3 ja A_4 vektoriavaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$?
3. Merkitään $\mathcal{B} = (A_1, A_2, A_3, A_4)$. Edellisten tehtävien perusteella tiedetään, että $\mathcal{B}$ on avaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ kanta. Määritä matriisi C, jonka koordinaattivektori kannan $\mathcal{B}$ suhteen on $(2, 7, 1, 8)$.
4. Tutkitaan vektoriavaruutta $\mathcal{P}_2$ ja sen kahta kantaa, $\mathcal{E} = (1, x, x^2)$ ja $\mathcal{B} = (-2x,\ x^2 + 4x,\ 3)$. Merkitään $p = x^2 + x + 1$.
   (a) Määritä $[p]_{\mathcal{E}}$ eli polynomin $x^2 + x + 1$ koordinaattivektori kannan $\mathcal{E}$ suhteen.
   (b) Määritä $[p]_{\mathcal{B}}$ eli polynomin $x^2 + x + 1$ koordinaattivektori kannan $\mathcal{B}$ suhteen.

Tehtäväsarja II

Lineaarikuvaukset ovat kuvauksia vektoriavaruudelta toiselle. Ryhdy tutustumaan lukuun 19, jossa ne esitellään.

5. Tutki, ovatko seuraavat funktiot lineaarikuvauksia. Käytä lineaarikuvauksen määritelmää 19.1. Piirrä lisäksi koordinaatistoon kummankin funktion kuvaaja.
   (a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jolle $f(x) = -2x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.
   (b) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jolle $g(x) = 2 - x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.
6. Tutkitaan kuvausta $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1^2 + x_2,\ x_2 + x_3)$.
   (a) Määritä vektorien $(-1, 0, 1)$ ja $(3, -5, -2)$ kuvavektorit kuvauksessa L.
   (b) Onko L lineaarikuvaus?
7. Onko kuvaus $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, $L(x_1, x_2) = (x_1,\ x_1 + x_2,\ x_2,\ 2x_1)$ lineaarikuvaus?
8. Olkoon $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineaarikuvaus, jolle pätee $L(1, 0) = (3, -1)$ ja $L(0, 1) = (2, 4)$.
   (a) Määritä $L(5, -6)$.
   (b) Oletetaan, että $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Määritä $L(x_1, x_2)$.

Tehtäväsarja III

9. Lauseen 19.8 mukaan jokainen matriisi määrää lineaarikuvauksen. Tarkastellaan matriisia

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 2 & -1 & 3 \\ 9 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

   (a) Matriisi A määrää lineaarikuvauksen $L_A\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$. Mitä lukuja p ja q ovat?

   (b) Oletetaan, että $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$. Laske kuvavektori $L_A(\bar{x})$.

   (c) Kirjoita b-kohdan kuvavektori $q \times 1$-matriisina ja vertaa sitä matriisiin A. Huomaatko mitään yhtäläisyyksiä?

10. Eräs matriisi B määrää lineaarikuvauksen $L_B\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, jolla

$$(x_1, x_2) \mapsto (4x_1 - 5x_2, 3x_2, x_1 + 8x_2).$$

   Mikä matriisi B on?

11. Tässä tehtävässä tarvitaan lukua 19.2, jossa käsitellään aliavaruuden kuvaa lineaarikuvauksessa. Tarkastellaan tehtävän 10 lineaarikuvausta $L_B\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Merkitään $\bar{w} = (1, 2)$.

   (a) Havainnollista koordinaatistossa lähtöavaruuden $\mathbb{R}^2$ aliavaruutta $W = \operatorname{span}(\bar{w})$.

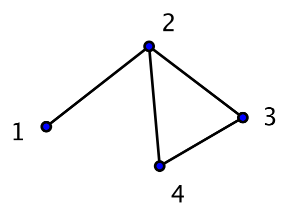
   (b) Keksi kolme vektoria, jotka kuuluvat aliavaruuden W kuvaan $L_B W$.

   (c) Määritä joukko $L_B W$.

   (d) Havainnollista joukkoa $L_B W$ omin sanoin tai piirtämällä.

Tehtäväsarja IV

12. Neljän kaupungin välillä kulkee lentoreittejä oheisen kaavion mukaisesti. Tilannetta voidaan havainnollistaa 4×4-matriisilla A, joka määritetään seuraavasti: $A(i, j) = 1$, jos kaupunkien i ja j välillä on suora lentoreitti, ja $A(i, j) = 0$, jos suoraa lentoreittiä ei ole.



   (a) Kirjoita lentoreittiverkostoa vastaava matriisi A.

   (b) Laske matriisipotenssi A^2. Mitä sen alkiot kertovat erilaisista reittivaihtoehdoista?

   (c) Lisätehtävä: Oletetaan, että $n \in \{1, 2, \dots\}$. Mitä potenssi A^n kertoo lentoreiteistä?

Tehtäväsarja V

13.* Onko joukko

$$W = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1 a_3 = 0\}$$

vektoriavaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruus? Käytä aliavaruuden määritelmää 16.1.

14.* Onko joukko

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \;\middle|\; a_{11} - a_{21} - a_{12} = 0 \right\}$$

vektoriavaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ aliavaruus? Käytä aliavaruuden määritelmää 16.1.

Tehtäväsarja VI

15. Tutkitaan jälleen joukkoa $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, jossa yhteenlasku $\oplus$ ja skalaarikertolasku $\odot$ on määritelty seuraavasti: jos x, $y \in \mathbb{R}_+$ ja $c \in \mathbb{R}$, niin

$$x \oplus y = x \cdot y \quad \text{ja} \quad c \odot x = x^c.$$

(a) Esitä vektoriavaruuden määritelmän ehto 6 käyttäen merkintöjä $\oplus$ ja $\odot$.

(b) Osoita, että vektoriavaruuden määritelmän ehto 6 pätee joukossa $\mathbb{R}_+$, kun se on varustettu yhteenlaskulla $\oplus$ ja skalaarikertolaskulla $\odot$.

(c) Osoita, että vektoriavaruuden määritelmän ehto 7 pätee joukossa $\mathbb{R}_+$, kun se on varustettu yhteenlaskulla $\oplus$ ja skalaarikertolaskulla $\odot$.

Ylimääräinen tehtävä

16. Vektoriavaruuden määritelmän ehdoista voidaan johtaa laskusääntöjä, jotka pätevät kaikissa vektoriavaruuksissa. Lauseessa 15.10 on lueteltu näistä laskusääänöistä tärkeimmät. Tässä tehtävässä todistetaan osia lauseesta 15.10.

Oletetaan, että V on vektoriavaruus ja $\bar{v} \in V$.

(a) Osoita, että $0\bar{v} = \bar{0}$.

(b) Osoita, että $(-1)\bar{v} = -\bar{v}$,