

Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2014
Harjoitus 1

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 31.10.2014 klo 19.30
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 14.11.2014 klo 19.30

Käytä tehtävien palauttamisessa wutta kurssitunnusta. Saat sen sähköpostitse.

Viimeisen tehtäväsarjan tehtävistä on jaossa tuplapisteet. Niitä ei siis kannata jättää tekemättä.

Tehtäväsarja I

Tutustu kurssimateriaalin lukuun 15. Siinä laajennamme avaruuden \mathbb{R}^n käsitteen yleisemmäksi vektoriavaruuden käsitteeksi.

1. Tutkitaan vektoriavaruutta $\mathbb{R}^{2 \times 2}$, jonka muodostavat 2×2 -matriisit. Matriisien yhteenlasku ja skalaarikertolasku määritellään kuten ennenkin.

- (a) Mikä on tämän vektoriavaruuden nollavektori?
- (b) Merkitään

$$M = \begin{bmatrix} \pi & 2,7 \\ -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Mikä on matriisin (tai vektorin) M vastavektori?

Perustele vastauksesi vektoriavaruuden määritelmän avulla.

2. (a) Piirrä kuva joukosta $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$.
(b) Osoita, että vektorien tavallinen yhteenlasku ei ole joukossa K määritelty laskutoimitus.
(c) Osoita, että vektorien tavallinen skalaarikertolasku ei ole määritelty joukossa K .
(d) Totea, että K varustettuna vektorien tavallisella yhteenlaskulla ja skalaarikertolaskulla ei ole vektoriavaruus.
3. Rationaalilukujen joukon $\mathbb{Q} = \{m/n \mid m, n \in \mathbb{Z} \text{ ja } n \neq 0\}$ muodostavat luvut, jotka voidaan kirjoittaa murtolukumuodossa. Osoita, että joukko \mathbb{Q} ei ole vektoriavaruus, kun yhteenlasku on lukujen tavallinen yhteenlasku ja skalaarikertolasku lukujen tavallinen kertolasku.
4. Esimerkistä 15.6 käy ilmi, että funktiot $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ muodostavat vektoriavaruuden, jota tällä kurssilla merkitään symbolilla \mathcal{F} .
 - (a) Yksi tämän vektoriavaruuden alkio (eli vektori) on funktio f , jolle $f(x) = 2x - 3$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Piirrä koordinaatistoon funktion f kuvaaja.

- (b) Millainen on tämän vektoriavaruuden \mathcal{F} nollavektori? Piirrä myös sen kuvaaja koordinaatistoon.
- (c) Millainen on a-kohdan vektorin f vastavektori $-f$? Piirrä sen kuvaaja samaan koordinaatistoon kuin f :n kuvaaja.
5. Määritellään positiivisten reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ yhteenlasku \oplus ja skalaarikertolasku \odot seuraavasti: jos $x, y \in \mathbb{R}_+$ ja $c \in \mathbb{R}$, niin

$$x \oplus y = x \cdot y \quad \text{ja} \quad c \odot x = x^c.$$

- (a) Laske $3 \oplus 4$ ja $-3 \odot 2$.
- (b) Voidaan osoittaa, että \mathbb{R}_+ varustettuna yhteenlaskulla \oplus ja skalaarikertolaskulla \odot on vektoriavaruus. Mikä on tämän vektoriavaruuden nollavektori?
- 6.* Jatkoa edelliseen tehtävään.
- (a) Mikä on vektorin 5 vastavektori -5 ? Perustele vastauksesi.
- (b) Lauseen 15.10 mukaan minkä tahansa vektoriavaruuden vektorille \bar{v} pätee $0\bar{v} = \bar{0}$. Tarkista laskemalla, että tämä on totta vektoriavaruuden \mathbb{R}_+ vektorille $\bar{v} = 3$.

Tehtäväsarja II

Tutustu kurssimateriaalin lukuun 16, joka käsittelee aliavaruuksia. Aliavaruudet ovat vektoriavaruuksia, jotka sisältyvät toiseen vektoriavaruuteen.

7. Merkitään $W = \{(3x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.
- (a) Piirrä kuva joukosta W .
- (b) Oletetaan, että $\bar{w} \in W$ ja $\bar{u} \in W$. Osoita, että $\bar{w} + \bar{u} \in W$.
- (c) Oletetaan, että $\bar{w} \in W$ ja $r \in \mathbb{R}$. Osoita, että $r\bar{w} \in W$.
- (d) Osoita, että $\bar{0} \in W$.
- (e) Totea, että W on vektoriavaruuden \mathbb{R}^2 aliavaruus.
8. Piirrä kuva joukosta $S = \{(-2, -3) + t(4, 1) \mid t \in \mathbb{R}\}$.
- (a) Valitse kaksi vektoria joukosta S ja piirrä ne kuvaan. Onko vektoreiden summa joukon S vektori? Kuva riittää perusteluksi.
- (b) Valitse jokin vektori \bar{v} joukosta S . Onko $3\bar{v}$ joukon S vektori? Kuva riittää perusteluksi.
- (c) Mitkä aliavaruuden määritelmän ehdoista joukko S täyttää?
- 9.* Oletetaan, että W on vektoriavaruuden \mathbb{R}^4 aliavaruus, johon kuuluvat vektorit $\bar{e}_1 = (1, 0, 0, 0)$ ja $\bar{w} = (0, 1, 0, 1)$. Kuuluvatko tällöin myös seuraavat vektorit aliavaruuteen W ? Perustele vastauksesi aliavaruuden määritelmällä tai selitä, miksi vastausta ei voida tietää varmasti.
- (a) $\bar{v}_1 = (0, 0, 0, 0)$ (b) $\bar{v}_2 = (1, 1, 0, 1)$
- (c) $\bar{v}_3 = (3, 4, 0, 4)$ (d) $\bar{v}_4 = (1, 1, 1, 1)$

10. Tarkastellaan 2×2 -matriisien muodostamaa vektoriavaruutta $\mathbb{R}^{2 \times 2}$. Osoita, että joukko
- $$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & a \\ -3b & b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} \text{ on avaruuden } \mathbb{R}^{2 \times 2} \text{ aliavaruus.}$$

Tehtäväsarja III

Näissä tehtävissä tutustutaan polynomeihin. Reaalikertoimiset polynomit muodostavat vektoriavaruuden, joten polynomit ovat vektoreita uuden määritelmämme mukaan. Polynomeista kerrotaan esimerkissä 15.5.

11. Luettele kolme mahdollisimman erilaista vektoriavaruuden \mathcal{P} alkiota.
12. Mikä on vektoriavaruuden \mathcal{P} vektorin $(5/3)x^2 - 15x^3 - 1$ vastavektori? Perustelee vastauksesi vastavektorin määritelmän avulla.
13. Merkitään

$$\begin{aligned}p &= 2x^4 - 7x^3 - 2x - 6, \\q &= x^4 - 2x^3 - x \quad \text{ja} \\r &= -3x^3 - 6.\end{aligned}$$

Mitkä seuraavista polynomeista ovat samoja?

$$(a) 2q + r \quad (b) \left(-\frac{2}{3}\right)r \quad (c) -\left(\frac{2}{3}r\right) \quad (d) p \quad (e) -6 - 2x - 7x^3 + 2x^4$$

Tehtäväsarja IV

Kirjoita tämän tehtäväsarjan ratkaisut *eri paperille kuin muut ratkaisut*. Nido paperi kuitenkin yhteen muiden ratkaisujen kanssa. Muista myös kirjoittaa paperiin *kurssitunnukseksi*. Opiskelijoiden ratkaisut näihin tehtäviin kerätään talteen ja niitä käytetään kurssia koskevassa tutkimuksessa. Tehtäväsarjan tehtävistä saa tuplapisteet: kukin tehtävä vastaa kahta tavallista tehtävää.

Luvuissa 17 ja 18 syvennetään tietoja jo aiemmin opiskelluista vapauden ja kannan käsitteistä yleistämällä ne avaruudesta \mathbb{R}^n mihin tahansa vektoriavaruuteen.

14. Tässä tehtävässä käsitellään polynomien muodostamaa vektoriavaruutta \mathcal{P} . Turhia laskuja kannattaa välttää.
 - (a) Pitääkö paikkansa, että $2x - 2 \in \text{span}(5x^2, x - 2, 2x)$?
 - (b) Pitääkö paikkansa, että $x^4 \in \text{span}(5x^2, x - 2, 2x)$?
15. Merkitään

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Virittävätkö vektorit B_1, B_2, B_3 ja B_4 vektoriavaruuden $\mathbb{R}^{2 \times 2}$? Nojaa perusteluissasi virittämisen määritelmään.

16. Oletetaan, että V on vektoriavaruus, johon kuuluvat vektorit \bar{v} ja \bar{w} . Osoita vapauden määritelmän perusteella, että jos jono (\bar{v}, \bar{w}) on sidottu, niin jompikumpi vektoreista \bar{v} ja \bar{w} on toisen skalaarimonikerta.