Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kurssikoe 17.12.2014
Ratkaisuehdotus

1. (a) Tutkitaan kuvausta $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, jolle pätee $f(1,0) = (1,1)$, $f(0,1) = (1,-1)$ ja $f(1,1) = (2,1)$. Voiko kuvaus f olla lineaarinen?

   (b) Tutkitaan kuvausta $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, jolle pätee

$$g(1,0) = (1,1), \quad g(0,1) = (1,-1), \quad g(1,1) = (2,0) \quad \text{ja} \quad g(2,0) = (2,2).$$

   Onko kuvaus g välttämättä lineaarinen?

   (c) Lineaarikuvaus $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ kiertää ensin tason vektoreita 180° vastapäivään ja projisoi ne sitten suoralle $\operatorname{span}((1,1))$. Määritä lineaarikuvauksen matriisi.

Ratkaisuehdotus:

(a) Osoitetaan, että f ei ole lineaarinen. Oletetaan vastoin väitettä, että f on lineaarinen. Nyt $f(1,1) = f(1,0) + f(0,1) = (1,1) + (1,-1)$. Tämä on ristiriita, sillä $f(1,1) = (2,1)$. Siis f ei ole lineaarinen.

(b) Kuvaus g ei ole välttämättä lineaarinen. Voisi esimerkiksi olla $g(2,0) = (0,0)$, jolloin $g(2(0,1)) = g(2,0) = (0,0)$ ja $2g(0,1) = 2(1,-1) = (2,-2)$. Nyt siis $g(2(0,1)) \neq 2g(0,1)$, mikä on mahdotonta lineaarikuvaukselle.

(c) Tutkitaan, kuinka luonnollisen kannan vektorit kuvautuvat. Kantavektori $(1,0)$ kiertyy ensin vektoriksi $(-1,0)$ ja projisoituu sen jälkeen vektoriksi

$$\frac{(-1,0)\cdot(1,1)}{(1,1)\cdot(1,1)}(1,1) = (-1/2,-1/2).$$

Kantavektori $(0,1)$ puolestaan kiertyy ensin vektoriksi $(0,-1)$ ja projisoituu sen jälkeen vektoriksi

$$\frac{(0,-1)\cdot(1,1)}{(1,1)\cdot(1,1)}(1,1) = (-1/2,-1/2).$$

Lineaarikuvuaksen matriisissa ovat sarakkeina nämä kuvavektorit:

$$\begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

Vaihtoehtoisesti matriisi voidaan löytää määrittämällä ensin kierron matriisi K ja peilauksen matriisi P ja kertomalla ne sen jälkeen keskenään. Etsitty matriisi on PK.

2. (a) Osoita aliavaruuden määritelmän nojalla, että

$$W = \{(a_1,a_2,a_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1 + 2a_2 - 4a_3 = 0\}$$

   on avaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruus.

   (b) Anna esimerkki polynomiavaruuden $\mathcal{P}$ aliavaruudesta, jonka dimensio on kaksi. Perustele vastauksesi huolellisesti dimension määritelmän avulla.

Ratkaisuehdotus:

(a) Oletetaan, että $\bar{a}, \bar{b} \in W$ ja $r \in \mathbb{R}$. Nyt $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ja $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ joillakin $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$. Lisäksi pätee $a_1 + 2a_2 - 4a_3 = 0$ ja $b_1 + 2b_2 - 4b_3 = 0$.

Tutkitaan summaa $\bar{a} + \bar{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$. Koska

$$a_1 + b_1 + 2(a_2 + b_2) - 4(a_3 + b_3) = a_1 + 2a_2 - 4a_3 + b_1 + 2b_2 - 4b_3 = 0 + 0 = 0,$$

summa $\bar{a}+\bar{b}$ on aliavaruuden W alkio. Tutkitaan sitten skalaarimonikertaa $r\bar{a} = (ra_1, ra_2, ra_3)$. Koska

$$ra_1 + 2ra_2 - 4ra_3 = r(a_1 + 2a_2 - 4a_3) = r \cdot 0 = 0,$$

myös $r\bar{a}$ on aliavaruuden W alkio.

Lisäksi nollavektori $(0, 0, 0)$ on aliavaruudessa W, sillä $0 + 2 \cdot 0 - 4 \cdot 0 = 0$.

(b) Merkitään $W = \operatorname{span}(1, x)$. Osoitetaan, että $(1, x)$ on aliavaruuden W kanta. On siis näytettävä, että jono on vapaa. Oletetaan, että $a, b \in \mathbb{R}$ ja $a \cdot 1 + bx = 0$. (Tässä 0 tarkoittaa nollapolynomia.) Nyt $a + bx = 0$, joten $a = 0$ ja $b = 0$. Siten jono $(1, x)$ on vapaa. Näin ollen kyseessä on W:n kanta. Siten W:n dimensio on kaksi.

3. (a) Tutkitaan lineaarikuvausta

$$L\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathcal{P}, \quad L\left(\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}\right) = a_1x^4 + (2a_2 + a_3)x + 3a_4.$$

Keksi kolme alkiota, jotka ovat ytimessä $\operatorname{Ker} L$. Muista perustella vastauksesi.

(b) Oletetaan, että $L\colon V \to V$ on lineaarikuvaus. Osoita, että L on injektio, jos ja vain jos 0 ei ole kuvauksen L ominaisarvo.

Ratkaisuehdotus:

(a) Ytimessä ovat esimerkiksi alkiot

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{ja} \quad O = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 0 \end{bmatrix},$$

sillä $L(O) = 0x^4 + (2 \cdot 0 + 0)x + 0a_4 = 0$, $L(A) = 0x^4 + (2 \cdot 1 - 2)x + 0a_4 = 0$ ja $L(b) = 0x^4 + (2 \cdot 2 - 4)x + 0a_4 = 0$.

(b) Oletetaan ensin, että L on injektio. Oletetaan vastoin väitettä, että 0 on kuvauksen ominaisarvo. Tällöin $L(\bar{v}) = 0\bar{v} = \bar{0}$ jollakin $\bar{v} \in V \setminus \{\bar{0}\}$. Tällöin $\bar{v} \in \operatorname{Ker} L$. Tämä on ristiriita, sillä L on injektio ja siksi ytimessä on ainoastaan nollavektori. Siten 0 ei voi olla ominaisarvo. (Vaihtoehtoisesti ristiriidan saa siitä, että $L(\bar{0}) = \bar{0}$ ja $L(\bar{v}) = \bar{0}$, joten kuvaus L ei ole injektio.)

Oletetaan sitten, että 0 ei ole kuvauksen L ominaisarvo. Oletetaan vastoin väitettä, että L ei ole injektio. Nyt ytimessä $\operatorname{Ker} L$ on jokin nollasta poikkeava vektori $\bar{v} \in V$. Tällöin $L(\bar{v}) = \bar{0} = 0\bar{v}$. Siten $\bar{v}$ on ominaisarvoa 0 vastaava ominaisvektori. Tämä on ristiriita, joten L on injektio.

4. (a) Kaverisi opiskelee matematiikkaa, mutta ei ole käynyt kurssia Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II. Selitä hänelle lyhyesti, mitä vektorit ovat. Anna kaverillesi kolme mahdollisimman erilaista esimerkkiä vektoreista.

(b) Matriisiavaruudessa $\mathbb{R}^{2\times 2}$ voidaan määritellä sisätulo kaavalla

$$\left\langle \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} \right\rangle = aa' + bb' + 2cc' + 2dd'.$$

Seuraavissa tehtävissä käytetään tätä sisätuloa ja tutkitaan matriiseja

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{sekä} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

i. Määritä normi $\|A\|$.

ii. Keksi jokin nollamatriisista poikkeava matriisi, joka on aliavaruuden $W = \operatorname{span}(B)$ kohtisuorassa komplementissa $W^{\perp}$. Muista perustella vastauksesi.

Ratkaisuehdotus

(a) i.

$$\|A\| = \sqrt{\langle A, A\rangle} = \sqrt{(-3)(-3) + 2\cdot 2 + 2(-1)(-1) + 2\cdot 0\cdot 0} = \sqrt{15}$$

ii. Valitaan

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ja osoitetaan, että se kelpaa etsityksi matriisiksi. Oletetaan, että $D \in \operatorname{span}(B)$. Nyt on olemassa sellainen $t \in \mathbb{R}$, että

$$D = tB = \begin{bmatrix} 2t & 0 \\ 0 & 1t \end{bmatrix}.$$

Nähdään, että $\langle C, D\rangle = 1\cdot 2t + 0\cdot 0 + 2\cdot 0\cdot 0 + 2(-1)t = 0$. Siten C on kohtisuorassa jokaista aliavaruuden W alkiota vastaan eli se on kohtisuoran komplementin alkio.

Vaihtoehtoisesti voidaan vedota kurssin tulokseen, jonka mukaan riittää tarkastella virittäjävektoreita: jos vektori on kohtisuorassa aliavaruuden virittäjävektoreita vastaan, se on kohtisuorassa kaikkia aliavaruuden vektoreita vastaan. Koska $\langle C, B\rangle = 1\cdot 2 + 0\cdot 0 + 2\cdot 0\cdot 0 + 2(-1) = 0$, vektori C on kohtisuorassa virittäjävektoria B vastaan ja siten C on kohtisuoran komplementin alkio.