Selittävä lukutapa

Kun luet todistusta, tee seuraavat asiat jokaisen lukemasi rivin (tai virkkeen) jälkeen:

- Yritä tunnistaa keskeisimmät rivillä käytetyt ideat.
- Pyri selittämään itsellesi jokainen päättelyaskel selvittämällä, miten se liittyy todistuksessa aiemmin esiintyneisiin asioihin tai aikasempiin tietoihisi. Voit sanoa selityksen ääneen tai kirjoittaa sen muistiin.
- Jos jokin asia on ristiriidassa oman käsityksesi kanssa, sano sekin ääneen (tai kirjoita muistiin).

Ennen kuin siirryt seuraavalle riville, kysy itseltäsi seuraavat asiat:

- Ymmärränkö, mitä ideoita käytettiin?
- Ymmärränkö, miksi tiettyä ideaa käytettiin?
- Miten tämä idea liittyy toisiin ideoihin tässä todistuksessa? Entä aikaisempaan tietooni asiasta?
- Auttavatko selitykseni vastaamaan esittämiini kysymyksiin?

Esimerkki

Seuraavassa on esitetty eräs lause todistuksineen. Sen jälkeen todistuksen vaiheet on selitetty edellä kuvatun menetelmän mukaisesti.

Lause: Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n$. Tällöin $\bar{v} + \bar{w} = \bar{w} + \bar{v}$.

Todistus: Oletetaan kuten lauseessa, että $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ ja $\bar{w} \in \mathbb{R}^n$.
Tällöin $\bar{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ ja $\bar{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ joillakin $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}$ ja $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{R}$.
Koska reaalilukujen yhteenlasku on vaihdannainen, jokaisella $i \in \{1, \ldots, n\}$ pätee $v_i + w_i = w_i + v_i$.
Nyt nähdään, että

$$\begin{aligned}\bar{v} + \bar{w} &= (v_1 + w_1,\ v_2 + w_2,\ \ldots,\ v_n + w_n) \\ &= (w_1 + v_1,\ w_2 + v_2,\ \ldots,\ w_n + v_n) = \bar{w} + \bar{v}.\end{aligned}$$

Selitys

- Lauseen mukaan vektoreiden yhteenlasku on vaihdannainen eli sillä ei ole väliä, miten päin vektorit lasketaan yhteen. Tämä pitäisi siis osoittaa.
- Oletuksena on, että $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ ovat avaruuden $\mathbb{R}^n$ mitä tahansa vektoreita.

- Vektoreissa $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ on n komponenttia. Kirjoitetaan komponentit näkyviin: $\bar{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ ja $\bar{w} = (w_1, \ldots, w_n)$, missä luvut $v_1, \ldots, v_n$ ja $w_1, \ldots, w_n$ ovat reaalilukuja. Vektoreiden komponentit ovat siis reaalilukuja, joista ei ole tarkempaa tietoa.
- Komponentit ovat reaalilukuja, joten niiden yhteenlaskun tiedetään olevan vaihdannainen. Ei siis ole väliä, kummin päin ne lasketaan yhteen. Mutta mihin ihmeeseen tätä tarvitaan ja miksi se kerrotaan tässä?
- Ryhdytään laskemaan summaa $\bar{v}+\bar{w}$. Tavoitteena on osoittaa, että se on sama kuin $\bar{w}+\bar{v}$. Vektoreiden yhteenlaskun määritelmän mukaan kahden vektorin summa saadaan laskemalla yhteen vektoreiden komponentit:

  $$\bar{v} + \bar{w} = (v_1 + w_1,\, v_2 + w_2,\, \ldots,\, v_n + w_n).$$

  Nyt kukin komponenteista on kahden reaaliluvun summa, ja reaalilukujen summissa yhteenlaskettavien järjestys voidaan vaihtaa. Tähän siis tarvittiin edellisen kohdan huomiota! Eli nyt voidaan vaihtaa summattavien järjestys kussakin komponentissa:

  $$(v_1 + w_1,\, v_2 + w_2,\, \ldots,\, v_n + w_n) = (w_1 + v_1,\, w_2 + v_2,\, \ldots,\, w_n + v_n).$$

  Huomataan, että vektoreiden yhteenlaskun määritelmän mukaan

  $$(w_1 + v_1,\, w_2 + v_2,\, \ldots,\, w_n + v_n) = \bar{w} + \bar{v}.$$

  Vektoreiden $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ järjestys saatiin siis vaihdettua.
- Todistuksen yhtälöketju osoittaa, että $\bar{v} + \bar{w} = \bar{w} + \bar{v}$. Siten väite on todistettu.