Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I

30.9.2014

Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johanna Rämö, johanna.ramo@helsinki.fi

Käytännön asioita

Matematiikan ja tilastotieteen laitoksen pääaineopiskelijat:

- TVT-ajokortin suorituskokeet ma 6.10. ja 13.10. Lisätietoa laitoksen sivuilta syksyn 2014 opetuksen kohdalta.
- TVT-ajokortti on yhtenä kriteerinä uusien opiskelijoiden käyttöön annettavien tablettien ja kannettavien myöntämisessä.

Presemo

- Vapaata keskustelua otsikon "Linis-keskustelu"alla.
- Luennoitsijalle voi esittää kysymyksiä kohdassa "Kysymyksiä, toiveita ja kommentteja Johannalle".

Käsitekartta

Siirry istumaan jonkun viereen. Kaikilla on oltava pari. Jos et tunne vieruskaveriasi, esittäydy hänelle.

Mitkä väitteistä ovat tosia?

(a) Jos porrasmatriisin jossakin sarakkeessa ei ole johtavaa alkiota, vastaavalla yhtälöryhmällä on äärettömän monta ratkaisua.

(b) Jos yhtälöryhmässä on enemmän yhtälöitä kuin tuntemattomia, yhtälöryhmällä on äärettömän monta ratkaisua.

Mene osoitteeseen `presemo.helsinki.fi/joh` ja äänestä.

Mitkä seuraavista olisivat kelvollisia vapauden määritelmäksi?

Jono $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$ on vapaa, jos seuraava ehto pätee:

(a) $c_1\bar{v}_1 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{0}$, kun $c_1 = 0$, …, $c_k = 0$

(b) $c_1\bar{v}_1 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{0}$ ja $c_1 = 0$, …, $c_k = 0$

(c) Jos $c_1 = 0$, …, $c_k = 0$, niin $c_1\bar{v}_1 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{0}$

(d) Yhtälöllä $x_1\bar{v}_1 + \cdots + x_k\bar{v}_k = \bar{0}$ on täsmälleen yksi ratkaisu.

(e) Nollavektori voidaan kirjoittaa vektorien $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k$ lineaarikombinaationa.

Mene osoitteeseen `presemo.helsinki.fi/joh` ja äänestä.

Vapaus

Mikä pointti on vapaudessa?

Vapaus

Lause

Oletetaan, että $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$, ja että jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k)$ on vapaa. Tällöin jokainen aliavaruuden $\mathrm{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k)$ alkio voidaan kirjoittaa täsmälleen yhdellä tavalla vektorien $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k$ lineaarikombinaationa.

1. Oletetaan, että

$$\bar{w} = a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_k\bar{v}_k \quad \text{ja} \quad \bar{w} = b_1\bar{v}_1 + \cdots + b_k\bar{v}_k$$

   joillakin $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k \in \mathbb{R}$.
2. Nyt $a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_k\bar{v}_k = b_1\bar{v}_1 + \cdots + b_k\bar{v}_k$, joten

$$a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_k\bar{v}_k - (b_1\bar{v}_1 + \cdots + b_k\bar{v}_k) = \bar{0}.$$

3. Tästä seuraa, että

$$(a_1 - b_1)\bar{v}_1 + \cdots + (a_k - b_k)\bar{v}_k = \bar{0}.$$

4. Oletuksen nojalla $a_1 - b_1 = 0$, ..., $a_k - b_k = 0$. Siten $a_1 = b_1$, ..., $a_k = b_k$.
5. Näin ollen tutkitut lineaarikombinaatiot ovatkin itse asiassa samat.

Kanta

Määritelmä

Vektorijono on avaruuden V kanta, jos

(a) se on vapaa ja

(b) jonon vektorit virittävät avaruuden V.

Kanta

Lause

Oletetaan, että W on aliavaruus, jossa on vektorit $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_k$.

Jono $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_k)$ on aliavaruuden W kanta, jos ja vain jos jokainen aliavaruuden W vektori voidaan kirjoittaa täsmälleen yhdellä tavalla vektoreiden $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_k$ lineaarikombinaationa.

Kysymys

Muodostavatko seuraavat vektorit avaruuden $\mathbb{R}^3$ kannan?

$$\bar{v}_1 = (0, 1, 2), \quad \bar{v}_2 = (2, -3, 1), \qquad \bar{v}_3 = (0, 0, 1)$$

(a) Kyllä, todistin juuri asian vierustoverini kanssa.
(b) Kyllä, mutta en ole ihan varma.
(c) Tiedän kyllä, miten asian voisi tarkistaa, mutta aika ei riitä.
(d) Ei, mutta en ole ihan varma.
(e) Ei, todistin juuri asian vierustoverini kanssa.
(f) Muu vastaus.