

Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I

23.9.2014

Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johanna Rämö, johanna.ramo@helsinki.fi

Käytännön asioita

- ▶ Kyllästyttääkö puhelimen näytön tihrustaminen? Monisteita on vielä muutama jäljellä. Tilausohjeet löytyvät kurssisivulta.
- ▶ Tällä viikolla tarkistettiin tehtävä 15.

Siirry istumaan jonkun viereen. Kaikilla on oltava pari. Jos et tunne vieruskaveriasi, esittäydy hänelle.

Oletetaan, että x_1 , x_2 ja x_3 ovat reaalilukuja.

Mitkä seuraavista väitteistä ovat tosia?

(a) Jos $x_1 = 0$, $x_2 = -1$ ja $x_3 = 1$, niin

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -3 \\ + 2x_2 - 2x_3 = -4. \end{cases}$$

(b) Jos

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -3 \\ + 2x_2 - 2x_3 = -4, \end{cases}$$

niin $x_1 = 0$, $x_2 = -1$ ja $x_3 = 1$.

Mene osoitteeseen presemo.helsinki.fi/joh ja äänestä.

Oletetaan, että x ja y ovat reaalilukuja. Mitkä seuraavista väitteistä pitävät paikkansa?

(a) Jos $x = 3$ ja $y = 2$, niin $x^2 - y^2 = 5$.

(b) Jos $x^2 - y^2 = 5$, niin $x = 3$ ja $y = 2$.

Yhtälönratkaisu

Ratkaistaan yhtälö $2x - 3 = 5$:

$$2x - 3 = 5$$

$$2x = 8$$

$$x = 4$$

Miksi yhtälön voi ratkaista tällä tavalla? Mistä tiedämme, että näin löydetään kaikki ratkaisut?

Katso kurssisivun yhtälönratkaisuteksti!

Lineaarinen yhtälöryhmä

Lineaarisen yhtälöryhmän

$$\begin{cases} 3x + 6y + 3z = 9 \\ 2x + 4y + 3z = 4 \\ 5x + 11y + 8z = 11 \end{cases}$$

ratkaisussa on

- (a) $x = 1$.
- (b) $x = 2$.
- (c) $x = 3$.
- (d) Ei mikään edellisistä.
- (e) Aika loppui kesken!

Mene osoitteeseen premo.helsinki.fi/joh ja äänestä.

Lineaarinen yhtälöryhmä

Lineaarisen yhtälöryhmän

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ y + z = 0 \\ z = -2 \end{cases}$$

ratkaisussa on

- (a) $x = 1$.
- (b) $x = 2$.
- (c) $x = 3$.
- (d) Ei mikään edellisistä.
- (e) Aika loppui kesken!

Mene osoitteeseen premo.helsinki.fi/joh ja äänestä.

Yhtälönratkaisu

Määritelmä

Yhtälöryhmiä kutsutaan *ekvivalenteiksi*, jos niillä on täsmälleen samat ratkaisut.

Ideana on johtaa yhtälöryhmästä uusia ekvivalentteja yhtälöryhmiä alkeisrivitoimituksilla.

Yhtälönratkaisun idea

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right] \rightsquigarrow \begin{array}{c} \text{alkeisrivi-} \\ \dots \\ \text{toimituksia} \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} & d_1 \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} & d_2 \\ & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} & d_m \end{array} \right]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad = \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right. \leftarrow \begin{array}{c} \text{samat} \\ \text{ratkaisut} \end{array} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_{11}x_1 + \dots + c_{1n}x_n = d_1 \\ c_{21}x_1 + \dots + c_{2n}x_n = d_2 \\ \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad = \qquad \vdots \\ c_{m1}x_1 + \dots + c_{mn}x_n = d_m \end{array} \right.$$

Tehtävä

Mitkä seuraavista matriiseista ovat redusoituja porrasmatriiseja?

$$(a) \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

$$(b) \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$(c) \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 & -3 & 8 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 5 & -11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \pi \end{array} \right]$$

Mene osoitteeseen premo.helsinki.fi/joh ja äänestä.

Gaussin-Jordanin menetelmä

- (a) Minulle on selvää, mitkä ovat Gaussin-Jordanin yhtälönratkaisumenetelmän askelet.
- (b) Tiedän kyllä, mitä alkeisrivitoimitukset ovat, mutta en oikein ymmärrä, missä järjestyksessä ne pitäisi tehdä, jotta yhtälöryhmän saisi ratkaistuksi.
- (c) En osaa Gaussin-Jordanin yhtälönratkaisumenetelmää.
- (d) Muu vastaus.

Mene osoitteeseen presemo.helsinki.fi/joh ja äänestä.

Gauss-Jordanin mentelmä

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \end{array} \right] & \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \end{array} \right] & \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \end{array} \right] & \xrightarrow{R_3 + R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \end{array} \right] & \xrightarrow{(-1) \cdot R_2} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \end{array} \right] & \xrightarrow{R_3 + 2R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Esimerkki jatkuu

$$\begin{array}{ccc} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array} \right] & \xrightarrow{(1/4)R_3} & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \\ & & \xrightarrow{R_2 - R_3} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] & \xrightarrow{R_1 - 2R_3} & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

Vapaus

Merkitään $\bar{v} = (-1, 2)$ ja $\bar{w} = (3, 4)$.

Onko jono (\bar{v}, \bar{w}) vapaa?