Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2014
Harjoitus 7: Kertaustehtäviä

Näitä kertaustehtäviä tehdessä kannattaa keskittyä niihin asioihin, joissa tarvitsee vielä harjoitusta. Kaikkia tehtäviä ei tarvitse välttämättä tehdä.

1. Tee käsitekartta kurssin asioista tai tutki kurssisivulla olevaa valmista käsitekarttaa. Mitkä ovat kurssin keskeisiä asioita? Mitkä ovat vähemmän keskeisiä? Mitkä asiat hallitset? Mitä pitää vielä harjoitella?

Yhtälönratkaisu

2. Yhtälöryhmää vastaavasta matriisista on saatu alkeisrivitoimituksilla seuraava matriisi. Kuinka monta ratkaisua yhtälöryhmällä on? Määritä ratkaisut.

$$\text{a)}\quad \left[\begin{array}{ccc|r} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \text{b)}\quad \left[\begin{array}{ccrcc|r} 1 & 0 & -5 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

3. Erään yhtälöryhmän matriisi on saatu alkeisrivitoimituksilla muotoon

$$\left[\begin{array}{crc|c} 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & a & b+3 \end{array}\right].$$

Määritä ne reaaliluvut a ja b, joilla yhtälöryhmällä

(a) on tasan yksi ratkaisu;
(b) ei ole yhtään ratkaisua;
(c) on äärettömän monta ratkaisua.

Virittäminen

4. (a) Anna kolme joukon $\operatorname{span}((1,0,-3),(1,-1,1))$ vektoria, jotka poikkeavat vektoreista $(1,0,-3)$ ja $(1,-1,1)$.
   (b) Kirjoita joukon $\operatorname{span}((1,0,-3),(1,-1,1))$ määritelmä. (Yritä tehdä tämä ilman kurssimateriaalin apua ja tarkista sitten vastaus materiaalista.)

5. (a) Halutaan tutkia virittävätkö vektorit $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, $\bar{v}_3$ ja $\bar{v}_4$ avaruuden $\mathbb{R}^3$. Kun tutkitaan, onko vektori $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}$ vektorien $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ ja $\bar{v}_3$ lineaarikombinaatio, päädytään matriisiin

$$\left[\begin{array}{crrr|r} 1 & -2 & 4 & 4 & a_1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & a_1 - a_2 \end{array}\right].$$

Virittävätkö vektorit avaruuden $\mathbb{R}^3$?

(b) Halutaan tutkia virittävätkö vektorit $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, v_3 ja $\bar{v}_4$ avaruuden $\mathbb{R}^3$. Kun tutkitaan, onko vektori $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}$ vektorien $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, v_3 ja $\bar{v}_4$ lineaarikombinaatio, päädytään matriisiin

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & 4 & 3a_1 + 3a_2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2a_1 - a_2 + a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 \end{array}\right].$$

Virittävätkö vektorit avaruuden $\mathbb{R}^3$?

Vapaus

6. Merkitään $\bar{w}_1 = (1, 2, 0)$, $\bar{w}_2 = (1, 1, -1)$ ja $\bar{w}_3 = (1, 4, 2)$. Halutaan selvittää, onko jono $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3)$ vapaa. Millaista yhtälöä pitää tutkia? Millainen yhtälöryhmä siitä saadaan?

   Kun yhtälöryhmän matriisia muokataan alkeisrivitoimituksilla, saadaan matriisi

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

   Mitä tämän perusteella voidaan päätellä jonon $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3)$ vapaudesta? Perustele vastauksesi huolellisesti.

7. Merkitään $\bar{v}_1 = (1, 0, 3)$, $\bar{v}_2 = (1, 1, 0)$ ja $\bar{v}_3 = (-1, 0, a)$, missä $a \in \mathbb{R}$. Millä luvun a arvoilla jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ on vapaa?

8. Oletetaan, että vektorit $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ ja $\bar{v}_3$ ovat lineaarisesti riippumattomia avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektoreita. Onko jono $(\bar{v}_2 - \bar{v}_3,\ \bar{v}_1 - \bar{v}_3,\ \bar{v}_1 - \bar{v}_2)$ vapaa?

Kanta, koordinaatit, dimensio

9. Avaruudella $\mathbb{R}^2$ on kannat $\mathcal{B}_1 = ((0, 2), (-1, -1))$ ja $\mathcal{B}_2 = ((3, 1), (0, 1))$. Tutkitaan näitä kantoja sekä vektoria $\bar{v} = (3, 7)$.

   (a) Määritä vektorin $\bar{v}$ koordinaatit kannan $\mathcal{B}_1$ suhteen. Piirrä vektorista $\bar{v}$ kuva koordinaatistoon, jonka koordinaattiakselit ovat kannan $\mathcal{B}_1$ vektorien suuntaiset. Miten koordinaatit näkyvä kuvassa?

   (b) Määritä vektorin $\bar{v}$ koordinaatit kannan $\mathcal{B}_2$ suhteen. Piirrä vektorista $\bar{v}$ kuva koordinaatistoon, jonka koordinaattiakselit ovat kannan $\mathcal{B}_2$ vektorien suuntaiset. Miten koordinaatit näkyvä kuvassa? Näyttääkö vektori $\bar{v}$ erilaiselta kuin edellisessä kuvassa?

10. Osoita, että avaruudella $\mathbb{R}^3$ on kanta $((1, 0, 1), (1, 1, 1), (0, 0, 2))$. Minkä vektorin koordinaatit tämän kannan suhteen ovat 15, -4 ja 2?

11. Millaisia dimensioita voi olla vektoriavaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruuksilla? Listaa mahdolliset dimensiot ja anna kunkin kohdalla esimerkki aliavaruudesta, jolla on tämä dimensio. (Sinun ei tarvitse todistaa tämällisesti, että olet löytänyt kaikki mahdolliset dimensiot.)

Käänteismatriisi

12. (a) Miten määritellään kääntyvä matriisi? Millä kaikilla tavoilla voi tutkia, onko matriisi kääntyvä?
    (b) Merkitään
    $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & c & -1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \end{bmatrix},$$
    missä $c \in \mathbb{R}$. Mikä luvun c pitää olla, jotta B olisi matriisin A käänteismatriisi?

13. Selitä omin sanoin, miten ja millaisessa tilanteessa käänteismatriisit auttavat yhtälöryhmien ratkaisemisessa.

14. Oletetaan, että A, B ja C ovat kääntyviä $n \times n$-matriiseja ($n \in \{1, 2, \dots\}$). Osoita, että myös matriisi ABC on kääntyvä. Mikä on sen käänteismatriisi?

Ominaisarvo

15. Osoita, että $\bar{v} = (1, -2)$ on matriisin
    $$A = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$$
    ominaisvektori. Mikä on sitä vastaava ominaisarvo?

16. Tässä tehtävässä tarkastellaan matriisia $C = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.
    (a) Määritä matriisin C ominaisarvot ja niitä vastaavat ominaisvektorit.
    (b) Mitä matriisilla C kertominen tekee vektorille $\bar{v} = (1324, 1324, 0)$? Entä vektorille $\bar{w} = (5897, 0, -49632)$?

17. Oletetaan, että 0 ei ole neliömatriisin C ominaisarvo. Osoita, että C on kääntyvä.

Pistetulo

18. Merkitään $\bar{w} = (-2, 1, 1)$, $\bar{v}_1 = (1, 2, 0)$ ja $\bar{v}_2 = (0, 1, -1)$.
    (a) Osoita kohtisuoruuden määritelmän nojalla, että vektori $\bar{w}$ on kohtisuorassa vektoreita $\bar{v}_1$ ja $\bar{v}_2$ vastaan.
    (b) Osoita kohtisuoruuden määritelmän nojalla, että vektori $\bar{w}$ on kohtisuorassa jokaista aliavaruuden $\operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ vektoria vastaan.

19. Mitkä seuraavista sievennyksistä saa tehdä? Perustele.
    (a)
    $$\frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\bar{w} \cdot \cancel{\bar{w}}} \cancel{\bar{w}} = \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\bar{w}}$$
    (b)
    $$\frac{\bar{v} \cdot \cancel{\bar{w}}}{\bar{w} \cdot \cancel{\bar{w}}} = \frac{\bar{v}}{\bar{w}}$$

(c)

$$\frac{\bar{v}\cdot\bar{w}}{\cancel{\bar{w}\cdot\bar{w}}}(\cancel{\bar{w}\cdot\bar{w}}) = \bar{v}\cdot\bar{w}$$

(d)

$$\frac{\bar{v}\cdot\cancel{\bar{w}}}{\cancel{\bar{w}}\cdot\cancel{\bar{w}}}\cancel{\bar{w}} = \bar{v}$$

20. Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n$ ja $\|\bar{w}\| = 1$.

(a) Laske projektion $\text{proj}_{\bar{w}}(\bar{v})$ normi.

(b) Mitä pistetulo $\bar{v}\cdot\bar{w}$ kertoo tässä tapauksessa projektiosta $\text{proj}_{\bar{w}}(\bar{v})$?