Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2014
Harjoitus 6

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 10.10.2014 klo 19.30
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 24.10.2014 klo 19.30

Tehtäväsarja I

1. Olkoon $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & c & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. Mikä luvun c pitäisi olla, jotta matriisi A ei olisi kääntyvä?

   (Lisätehtävä: Kuinka monella eri tavalla osaat ratkaista tehtävän? Luettele keksimiäsi tapoja.)

2. Neliömatriisin B sarakkeina ovat eräät vektorit $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3 \in \mathbb{R}^3$. Matriisin B determinantti on 3. Onko vektorijono $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3)$ vapaa?

Tehtäväsarja II

Seuraavat tehtävät liittyvät materiaalin luvun 12 asioihin. Uutena asiana opiskellaan diagonalisointia, josta kerrotaan kappaleessa 12.3.

Tehtävissä 3–4 tarkastellaan matriisia

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}.$$

3. (a) Määritä matriisin A ominaisarvot ja ominaisvektorit.
   (b) Valitse yksi matriisin A ominaisarvoista. Piirrä koordinaatistoon joukko, jonka muodostavat kaikki tähän ominaisarvoon liittyvät matriisin A ominaisvektorit (tuloksena on valitsemaasi ominaisarvoon liittyvä ns. ominaisavaruus). Mitä matriisilla A kertominen tekee tämän joukon vektoreille?

4. Merkitään $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ja $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

   (a) Laske potenssi D^3. Mitä huomaat? Mitä olisi D^n?
   (b) Miten matriisi D liittyy edelliseen tehtävään?
   (c) Etsi käänteismatriisi P^{-1} ja laske tulo $P^{-1}AP$. Mitä huomaat?
   (d) Miten matriisi P liittyy edellisiin tehtäviin?
   (e) Miten matriisien D ja P sarakkeet liittyvät toisiinsa?
   (f) Onko matriisi A diagonalisoituva?
   (g) Laske potenssi A^5 samaan tapaan kuin luentomateriaalin esimerkissä 12.12.

5. Onko matriisi $B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ diagonalisoituva?

Tehtäväsarja III

6. Tutkitaan jälleen matriisia

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{bmatrix},$$

joka kuvaa opiskelijoiden luentokäyttäytymistä (ks. harjoitus 4). Tiedetään, että matriisilla A on ominaisarvo 1, jota vastaavat ominaisvektorit ovat muotoa $(3/2t, t)$, missä $t \in \mathbb{R} \setminus \{\bar{0}\}$.

Oletetaan, että kursilla on yhteensä 250 opiskelijaa. Etsi tasapainotila, eli selvitä, kuinka monta opiskelijaa pitää olla luennolla ja kuinka monta kotona, jotta tilanne ei muuttuisi seuraavana päivänä.

7.* Oletetaan, että λ on matriisin A ominaisarvo. Osoita, että jos $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ ovat ominaisarvoa λ vastaavia ominaisvektoreita ja $\bar{v} \neq -\bar{w}$, niin myös $\bar{v} + \bar{w}$ on ominaisarvoa λ vastaava ominaisvektori. Nojaa perusteluissasi ominaisarvon määritelmään.

Neuvo: Väite on muotoa ”jos...niin”. Se todistetaan olettamalla väitteen alkuosa ja osoittamalla, että siitä seuraa väitteen loppuosa.

Tehtäväsarja IV

Tutustu materiaalin lukuun 13, joka käsittelee vektorien pistetuloon liittyviä käsitteitä.

8. (a) Merkitään $\bar{v} = (-2, 1)$ ja $\bar{w} = (3, 4)$. Määritä pistetulo $\bar{v} \cdot \bar{w}$ ja normi $\|\bar{v}\|$.

   (b) Mitkä seuraavista vektoreista ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan? Muista käyttää kohtisuoruuden määritelmää. Piirrä tilannetta havainnollistava kuva.

$$\bar{a} = (6, 4), \quad \bar{b} = (4, -5), \quad \bar{c} = (-2, 3).$$

9. Tuotteiden viivakoodit muodostuvat kahdestatoista numerosta, jotka ovat välillä 0–9. Voidaan ajatella, että viivakoodit ovat 12-ulotteisia vektoreita. Viivakoodin $\bar{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_{11}, d)$ yksitoista ensimmäistä numeroa sisältävät tuotteen tiedot. Viimeinen numero d on tarkistusnumero. Sen määrittämiseen käytetään kontrollivektoria

$$\bar{c} = (3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1).$$

Tarkistusnumero valitaan niin, että pistetulo $\bar{u} \cdot \bar{c}$ on kymmenellä jaollinen.

   (a) Mikä on viivakoodin $\bar{u} = (7, 8, 9, 5, 2, 4, 9, 5, 2, 3, 4, d)$ tarkistusnumero d?

   (b) Mikä on viivakoodin $\bar{w} = (4, 0, 8, 4, 3, 0, 0, 1, \blacksquare, 1, 3, 1)$ tuhraantunut merkki?

10.* Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n$ ja $\|\bar{v}\| = 2$, $\|\bar{w}\| = 3$ ja $\bar{v} \cdot \bar{w} = -1$.

   (a) Merkitään $\bar{a} = 3\bar{v} - \bar{w}$ ja $\bar{b} = \bar{v} + \bar{w}$. Määritä $\bar{a} \cdot \bar{b}$.

   (b) Määritä $\|\bar{v} + 2\bar{w}\|$.

Tehtäväsarja V

Seuraavien tehtävien avulla opiskellaan vektorin projektion käsitettä, josta kerrotaan materiaalin kappaleessa 13.2.

11. Merkitään $\bar{w} = (1, 2)$. Piirrä (ilman laskuja) kuva projektiosta $\mathrm{proj}_{\bar{w}}(\bar{v})$, jos

    (a) $\bar{v} = (3, 4)$ (b) $\bar{v} = (-1, -3)$ (c) $\bar{v} = (4, -2)$ (d) $\bar{v} = (-2, -4)$.

    Piirrä edellisiin kuviin myös erotusvektori $\bar{v} - \mathrm{proj}_{\bar{w}}(\bar{v})$.

12. Tarkista laskemalla, että piirsit projektiovektorit edellisessä tehtävässä oikein.

13. Olkoot $\bar{v}$, $\bar{w} \in \mathbb{R}^n$ ja $\bar{w} \neq 0$.

    (a) Päättele tehtävän 11 piirrosten avulla, mitä on $\mathrm{proj}_{\bar{w}}(\mathrm{proj}_{\bar{w}}(\bar{v}))$.
    (b) Päättele tehtävän 11 piirrosten avulla, mitä on $\mathrm{proj}_{\bar{w}}(\bar{v} - \mathrm{proj}_{\bar{w}}(\bar{v}))$.
    (c) Voit perustella havaintosi täsmällisesti, jos haluat. (Tehtävän voi merkitä tehdyksi, vaikka tekisi vain a- ja b-kohdat.)

Tehtäväsarja VI

14. Tarkastellaan vektorien $\bar{v}_1 = (1, 1, 0)$, $\bar{v}_2 = (0, 1, -2)$ ja $\bar{v}_3 = (1, 2, -2)$ virittämää avaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruutta $V = \mathrm{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$.

    (a) Etsi kanta aliavaruudelle V.
    (b) Mikä on aliavaruuden V dimensio?
    (c) Onko aliavaruus V suora tai taso?
    (d) Määritä vektori, jonka koordinaatit löytämäsi kannan suhteen ovat 4 ja -1.

Ylimääräinen tehtävä

Seuraava tehtävä on hieman haastavampi. Sillä voi korvata minkä tahansa tähdettömän tehtävän.

15. Sanotaan, että matriisit A ja B *kommutoivat*, jos pätee $AB = BA$.

    Tutkitaan 2×2-matriisien joukkoa $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Osoita, että ainoat joukon $\mathbb{R}^{2\times 2}$ matriisit, jotka kommutoivat kaikkien muiden 2×2-matriisien kanssa, ovat skalaarimatriisit

    $$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}, \quad \text{missä } a \in \mathbb{R}.$$

    Vihje todistuksen toista suuntaa varten: Oleta, että matriisi A kommutoi kaikkien joukon $\mathbb{R}^{2\times 2}$ matriisien kanssa. Tällöin A:n täytyy kommutoida muun muassa matriisien

    $$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

    kanssa. Mitä voit tällöin päätellä matriisista A?