Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2014
Harjoitus 5

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 3.10.2014 klo 19.30
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 17.10.2014 klo 19.30

Viimeisen tehtäväsarjan tehtävät ovat painoarvoltaan suurempia kuin muut tehtävät. Ne kannattaa siis tehdä!

Tehtäväsarja I

Tässä tehtäväsarjassa tarvitaan Matlabia. Tehtävässä 1 Matlabia voi käyttää apuna laskuissa, ja tehtävä 2 on kokonaan Matlab-tehtävä.

1. Matriiseja voi käyttää viestien salaamiseen. Näissä tehtävissä salaamiseen käytetään 3×3-matriisia. Ensin viesti muutetaan $3 \times n$-matriisiksi seuraavalla tavalla: Viestin kirjaimet koodataan niitä vastaaviksi järjestysnumeroksi aakkosissa ja numerot järjestetään matriisiksi ylhäältä alas ja vasemmalta oikealle. Tyhjä tila täytetään numerolla 0. Esimerkiksi viestiä "maamyyrä" vastaa matriisi
$$\begin{bmatrix} 13 & 13 & 18 \\ 1 & 25 & 28 \\ 1 & 25 & 0 \end{bmatrix}$$
Tätä matriisia kerrotaan vasemmalta salauksessa käytettävällä matriisilla, jonka vain viestin lähettäjä ja vastaanottaja tietävät. Kertolaskun tulos lähetetään vastaanottajalle.
   (a) Tehtävänäsi on lähettää viesti "tuhoa tiedostot". Salauksessa käytetään matriisia
   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$
   Miltä näyttää salattu viesti, jonka lähetät?
   (b) Saat salatun viestin
   $$\begin{bmatrix} 16 & 38 & 25 & 1 & 37 & 19 \\ 11 & 20 & 16 & 0 & 16 & 19 \\ 20 & 46 & 25 & 23 & 22 & 0 \end{bmatrix}.$$
   Salauksessa on käytetty samaa matriisia kuin edellisessä tehtävässä. Miten voit matriisien teorian avulla selvittää, mitä viestissä sanotaan?
2. (a) Tallenna koneellesi kurssisivulla oleva tiedosto `piirtaminen.m`.
   (b) Avaa tiedosto Matlabissa ja aja se komennolla `Run`. Mitä tiedostossa oleva koodinpätkä tekee?
   (c) Muuta koodia niin, että se piirtääkin vektorit $\bar{w} = (-2, 3)$ ja $A\bar{w}$. (Vektori $\bar{w}$ on tulkittava sarakevektoriksi eli 2×1 -matriisiksi.)
   (d) Tutki, mitä matriisilla $A = \left[\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ kertominen tekee tason vektoreille testaamalla asiaa eri vektoreilla. Kirjoita johtopäätöksesi ratkaisupaperiin.

Tehtäväsarja II

Tutustu kurssimateriaalin lukuun 12, jossa selviää, mitä ovat matriisin ominaisarvot ja ominaisvektorit.

Tehtävissä 3–5 tutkitaan matriisia $A = \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ 9 & -7 \end{bmatrix}$.

3. Merkitään $\bar{v}_1 = (1, 1)$ ja $\bar{v}_2 = (3, 3)$.

   (a) Laske tulot $A\bar{v}_1$ ja $A\bar{v}_2$.

   (b) Havainnollista vektoreita $\bar{v}_1$ ja $\bar{v}_2$ sekä tuloja $A\bar{v}_1$ ja $A\bar{v}_2$ koordinaatistossa paikkavektoreina. Selitä omin sanoin, mitä matriisilla A kertominen tekee vektoreille $\bar{v}_1$ ja $\bar{v}_2$.

   (c) Laske tulo $A\bar{u}$, missä $\bar{u} = (-1, 1)$. Vaikuttaako matriisilla A kertominen vektoriin $\bar{u}$ samalla tavalla kuin vektoreihin $\bar{v}_1$ ja $\bar{v}_2$?

   (d) Mitä voit päätellä matriisin A ominaisarvoista ja -vektoreista tämän tehtävän pohjalta?

4. Merkitään $\bar{w}_1 = (2, 3)$ ja $\bar{w}_2 = (-1;\ -1{,}5)$.

   (a) Laske tulot $A\bar{w}_1$ ja $A\bar{w}_2$.

   (b) Havainnollista vektoreita $\bar{w}_1$ ja $\bar{w}_2$ sekä tuloja $A\bar{w}_1$ ja $A\bar{w}_2$ koordinaatistossa paikkavektoreina. Selitä omin sanoin, mitä matriisilla A kertominen tekee vektoreille $\bar{w}_1$ ja $\bar{w}_2$.

   (c) Laske tulo $A\bar{e}_2$, missä $\bar{e}_2 = (0, 1)$. Vaikuttaako matriisilla A kertominen vektoriin $\bar{e}_2$ samalla tavalla kuin vektoreihin $\bar{w}_1$ ja $\bar{w}_2$?

   (d) Mitä voit päätellä matriisin A ominaisarvoista ja -vektoreista tämän tehtävän pohjalta?

5. Oletetaan, että B on $n \times n$-neliömatriisi ja $\lambda \in \mathbb{R}$.

   (a) Mikä ehto matriisin B determinantin pitää toteuttaa, jotta yhtälöllä $B\bar{x} = \bar{0}$ olisi muitakin ratkaisuja kuin $\bar{x} = \bar{0}$?

   (b) Laske matriisin $A - \lambda I$ determinantti.

   (c) Mikä luvun λ täytyy olla, jotta yhtälöllä $(A - \lambda I)\bar{x} = \bar{0}$ olisi muitakin ratkaisuja kuin $\bar{x} = \bar{0}$?

   (d) Määritä yhtälön $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$ eli yhtälön $(A - \lambda I)\bar{x} = \bar{0}$ ratkaisut c-kohdassa löytämiesi lukujen λ tapauksissa.

   (e) Mitä voit päätellä matriisin A ominaisarvoista ja ominaisvektoreista tämän tehtävän pohjalta?

Tehtäväsarja III

6.* Lineaarialgebran kurssilla pitää ratkaista seuraavanlainen tehtävä:

> Oletetaan, että $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3 \in \mathbb{R}^n$. Oletetaan, että jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ on vapaa. Onko jono $(\bar{v}_1 + \bar{v}_2,\ \bar{v}_2 + \bar{v}_3,\ \bar{v}_3)$ vapaa?

Kaverisi on ratkaisut tehtävän, mutta ei ole aivan varma, onko ratkaisu oikein. Mitä mieltä olet? Onko ratkaisussa jotain vikaa? Perustele vastauksesi.

Kaverisi ratkaisu:

> Oletuksena on, että jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ on vapaa. Jos siis $a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + a_3\bar{v}_3 = \bar{0}$ joillakin a_1, a_2, $a_3 \in \mathbb{R}$, niin $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ ja $a_3 = 0$.
> Oletetaan, että $a_1(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) + a_2(\bar{v}_2 + \bar{v}_3) + a_3\bar{v}_3 = \bar{0}$ joillakin a_1, a_2, $a_3 \in \mathbb{R}$. Huomataan, että
>
> $$a_1(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) + a_2(\bar{v}_2 + \bar{v}_3) + a_3\bar{v}_3 = a_1\bar{v}_1 + a_1\bar{v}_2 + a_2\bar{v}_2 + a_2\bar{v}_3 + a_3\bar{v}_3.$$
>
> Oletuksen mukaan $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ ja $a_3 = 0$. Siten
>
> $$\begin{aligned} &a_1\bar{v}_1 + a_1\bar{v}_2 + a_2\bar{v}_2 + a_2\bar{v}_3 + a_3\bar{v}_3 \\ &= 0\bar{v}_1 + 0\bar{v}_2 + 0\bar{v}_2 + 0\bar{v}_3 + 0\bar{v}_3 \\ &= \bar{0}. \end{aligned}$$
>
> Siis $a_1(\bar{v}_1+\bar{v}_2)+a_2(\bar{v}_2+\bar{v}_3)+a_3\bar{v}_3 = \bar{0}$. Tästä seuraa, että jono $(\bar{v}_1+\bar{v}_2,\ \bar{v}_2+\bar{v}_3,\ \bar{v}_3)$ on vapaa.

7.* Oletetaan, että $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3 \in \mathbb{R}^n$. Oletetaan lisäksi, että jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ on vapaa. Onko jono $(\bar{v}_1 - 2\bar{v}_3,\ 4\bar{v}_3,\ -\bar{v}_1 - \bar{v}_2)$ vapaa?

Tehtäväsarja IV

Jatketaan materiaalin luvun 8 opiskelua.

8. Tämä tehtävä liittyy esimerkkiin 8.4, jossa osoitetaan, että vektorit $\bar{w}_1 = (2, -1)$ ja $\bar{w}_2 = (1, 3)$ muodostavat avaruuden $\mathbb{R}^2$ kannan $\mathcal{B} = (\bar{w}_1, \bar{w}_2)$.
   (a) Määritä vektorin $\bar{u} = (10, 2)$ koordinaatit kannan $\mathcal{B}$ suhteen esimerkin 8.4 ratkaisun avulla. Piirrä näitä koordinaatteja havainnollistava kuva. Ota mallia esimerkin 8.6 kuvista.
   (b) Tiedetään, että vektorin $\bar{w}$ koordinaatit kannan $\mathcal{B}$ suhteen ovat 3 ja -2. Mistä vektorista on kysymys? Piirrä havainnollistava kuva.

9. Tässä tehtävässä tarkastellaan joukkoa $V = \{(s - 2t, 2s - 4t, -s + 2t) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$.
   (a) Osoita, että V on avaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruus etsimällä sille jotkin virittäjät.
   (b) Etsi aliavaruudelle V jokin kanta.
   (c) Mikä on aliavaruuden V dimensio? Havainnollista aliavaruutta V piirtämällä tai omin sanoin.

Tehtäväsarja V

Tutustu lukuun 10.1, jossa kerrotaan, kuinka alkeisrivitoimituksia voi saada aikaiseksi matriisikertolaskulla.

10. Tarkastellaan matriiseja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

    Päättele, mikä alkeismatriisi E toteuttaa annetun yhtälön:

    (a) $EA = B$ (b) $EB = A$ (c) $EC = D$ (d) $ED = C$.

11. Tutustu lauseeseen 10.7 ja sen todistukseen. Käy erityisen huolellisesti se todistuksen kohta, jossa osoitetaan, että ehdosta d) seuraa ehto e). Käytä apuna selittävää lukutapaa, jonka ohjeet löytyvät kurssisivulta. Kirjoita selityksesi ylös.

Tehtäväsarja VI

Kirjoita tämän tehtäväsarjan ratkaisut *eri paperille kuin muut ratkaisut*. Nido paperi kuitenkin yhteen muiden ratkaisujen kanssa. Muista myös kirjoittaa paperiin *kurssitunnuksesi*. Opiskelijoiden ratkaisut näihin tehtäviin kerätään talteen ja niitä käytetään kurssia koskevassa tutkimuksessa. Tehtäväsarjan tehtävistä saa tuplapisteet: kukin tehtävä vastaa kahta tavallista tehtävää.

12. Merkitään $\bar{a} = (3, 5, 1)$, $\bar{b} = (-1, -3, 1)$ ja $\bar{c} = (1, 1, 1)$ Virittävätkö vektorit $\bar{a}$, $\bar{b}$ ja $\bar{c}$ avaruuden $\mathbb{R}^3$?

13. Anna esimerkki vektoreista $\bar{v}_1, \bar{v}_2 \in \mathbb{R}^n$, joilla jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{0})$ on vapaa, tai osoita, että sellaisia ei ole.

14. Oletetaan, että A on neliömatriisi, jolle pätee $A^2 = O$. Osoita, että matriisi $I - A$ on kääntyvä ja että sen käänteismatriisi on $A + I$.