Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2014
Harjoitus 4

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 26.9.2014 klo 19.30
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 10.10.2014 klo 19.30

Tällä viikolla Matlabia käytetään ainakin tehtävissä 1, 6 ja 7. Komentojen kirjoittamiseen kannattaa komentoikkunan sijasta käyttää m-tiedostoja. Ohjeet löytyvät kurssisivulta.

Tehtäväsarja I

1. Opiskelijoiden päivittäinen luentokäyttäytyminen riippuu edellisestä päivästä seuraavasti:

   - Opiskelijoista, jotka olivat edellisenä päivänä luennolla, on seuraavana päivänä luennolla 80 % ja kotona 20 %.
   - Opiskelijoista, jotka olivat edellisenä päivänä kotona, on seuraavana päivänä luennolla 30 % ja kotona 70 %.

   (a) Eräänä päivänä luennolla oli 200 opiskelijaa ja kotona 60 opiskelijaa. Kuinka monta opiskelijaa oli luennolla seuraavana päivänä? Entä kotona?

   (b) Laske matriisitulo
   $$\begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200 \\ 60 \end{bmatrix}.$$
   Voit halutessasi käyttää apuna Matlabia. Miten tulo liittyy a)-kohdan laskuihin?

   (c) Selvitä matriisikertolaskun avulla, missä opiskelijat ovat kolmen päivän kuluttua, kun lähtötilanne on sama kuin a)-kohdassa. Matlabista on jälleen hyötyä.

2. Mitkä seuraavista väitteistä ovat tosia, mitkä epätosia? Muista, että tällainen väite osoitetaan epätodeksi antamalla vastaesimerkki.

   Oletetaan, että A, B ja C ovat matriiseja.

   (a) Jos $AB = O$, niin $A = O$ tai $B = O$.

   (b) Jos $AB = AC$ ja $A \neq O$, niin $B = C$.

   (c) Millaisia havaintoja teit matriisien kertolaskusta a)- ja b)-kohdissa? Miten matriisikertolasku eroaaa reaalilukujen kertolaskusta?

3. Oletetaan, että matriisit A ja B ovat kääntyviä samantyyppisiä neliömatriiseja. Ratkaise seuraavasta yhtälöstä matriisi X ja sievennä vastauksesi mahdollisimman pitkälle.
   $$(A^{-1}X)^{-1} = (AB^{-1})^{-1}(AB^2)$$

Tehtäväsarja II

Tutustu kurssimateriaalin lukuun 11, joka käsittelee determinanttia.

4. Laske $\det(A)$, jos

$$\text{(a)}\quad A = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(b)}\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(c)}\quad A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ -3 & 7 & 2 \end{bmatrix}.$$

5. Mitkä edellisen tehtävän matriiseista ovat kääntyviä? Käytä hyväksesi determinanttia.

Tehtäväsarja III

Tämän tehtäväsarjan tehtävät tehdään Matlabilla. Kannattaa katsoa kurssisivulta ohje m-tiedostojen käyttämiseen.

6. (a) Selvitä Internetin avulla, miten Matlabilla määritetään matriisin käänteismatriisi. Voit käyttää apuna vaikkapa hakukone Googlea.

   (b) Määritä Matlabin avulla matriisin

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 5 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

   käänteismatriisi.

   (c) Määritä sitten matriisin

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

   käänteismatriisi. Miksi saat virheilmoituksen?

7. Muotoa $A\bar{x} = \bar{b}$ olevia yhtälöitä voi ratkaista komennolla `A\b`.

   (a) Käytä komentoa `A\b` yhtälöryhmän

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 100 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 12 \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

   ratkaisemiseen.

   (b) Yritä sitten ratkaista samalla komennolla yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ -4x_1 + 8x_2 = -4. \end{cases}$$

   Nyt komento ei ratkaisekaan yhtälöryhmää. Mistä luulet sen johtuvan? Onko yhtälöryhmällä kuitenkin ratkaisu?

   (c) Entä mitä tapahtuu, kun yrittää ratkaista yhtälöryhmän

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -3 \\ 2x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$$

   komennolla `A\b`? Onko yhtälöryhmällä todellisuudessa ratkaisu?

Tehtäväsarja IV

8.⋆ Erään yhtälöryhmän matriisia on muokattu alkeisrivitoimituksilla päätyen alla olevaan matriisiin. Päättele suoraan matriisin perusteella, kuinka monta ratkaisua yhtälöryhmällä on. Tässä tehtävässä ei siis ole tarkoitus ratkaista yhtälöryhmää tai edes muokata matriisia.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 81 & 100 & -3/7 & 5 & \sqrt{3} \\ 0 & -5 & b & 4 & -55 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

9. Tarkastellaan lineaarista yhtälöryhmää

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + ax_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = b \end{cases}$$

Määritä ne reaaliluvut a ja b, joilla yhtälöryhmällä

(a) on tasan yksi ratkaisu;

(b) ei ole yhtään ratkaisua;

(c) on äärettömän monta ratkaisua.

Tehtäväsarja V

10. Merkitään $\bar{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\bar{v}_2 = (0, 2, 0)$ ja $\bar{v}_3 = (1, -1, 1)$.

(a) Näytä määritelmän 7.1 avulla, että vektorijono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ on sidottu.

(b) Voitko kirjoittaa jokin vektoreista toisten lineaarikombinaationa? Tee niin, jos mahdollista.

11.⋆ Merkitään $\bar{w}_1 = (1, 1, 1)$, $\bar{w}_2 = (1, 2, 3)$ ja $\bar{w}_3 = (1, -1, 2)$. Onko jono $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3)$ vapaa? Perustele vastauksesi vapauden määritelmän avulla. (Yhtälönratkaisussa saa halutessaan käyttää Matlabia, mutta muuten vastaus pitää perustella huolellisesti.)

12.⋆ Oletetaan, että $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$. Onko jono $(\bar{v}, 2\bar{v}, 3\bar{v})$ vapaa vai sidottu? Perustele väitteesi vapauden määritelmän avulla.

Tehtäväsarja VI

Ryhdy tutustumaan materiaalin lukuun 8, jossa käsitellään kantoja.

Tehtävissä 13–15 tutkitaan vektoreita $\bar{v}_1 = (0, 2, -1)$, $\bar{v}_2 = (1, 2, 0)$ ja $\bar{v}_3 = (1, 0, 2)$.

13. (a) Oletetaan, että $\bar{a} \in \mathbb{R}^3$. Osoita, että $\bar{a} \in \operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$.

(b) Päättele edellisen kohdan avulla, että vektorit $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ ja $\bar{v}_3$ virittävät avaruuden $\mathbb{R}^3$.

(c) Eräs vektori $\bar{u}$ esitettiin vektorien $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ ja $\bar{v}_3$ lineaarikombinaationa. Kertoimiksi saatiin 2, -7 ja 1. Mikä vektori oli kyseessä?

14. (a) Osoita, että vektorit $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ ja $\bar{v}_3$ ovat lineaarisesti riippumattomat toisistaan. Hyödynnä tehtävän 13 matriisia ja vältä turhia laskuja.
    (b) Mitä voit päätellä vektorijonosta $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ a-kohdan ja tehtävän 13 nojalla?

15. (a) Esitä vektori $\bar{w} = (10, 10, 10)$ vektorien $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ ja $\bar{v}_3$ lineaarikombinaationa. Hyödynnä tehtävää 13 ja vältä turhia laskuja.
    (b) Kuinka monella erilaisella tavalla a-kohdan vektori $\bar{w} = (10, 10, 10)$ voidaan esittää vektorien $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ ja $\bar{v}_3$ lineaarikombinaationa? Tässäkin voit selviytyä ilman laskuja.

Tehtäväsarja VII

16. Kaverisi on lineaarialgebran kurssilla, mutta ei ole oikein tajunnut, mitä vektorien virittämät aliavaruudet ovat ja miten ne liittyvät suoriin ja tasoihin. Kirjoita hänelle ytimekäs ja ymmärrettävä selitys asiasta.

Ylimääräinen tehtävä

Seuraava tehtävä on hieman haastavampi. Sillä voi korvata minkä tahansa tähdettömän tehtävän.

17. Olkoon $m \in \{1, 2, \ldots\}$. Oletetaan, että matriisi $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ on kääntyvä. Oletetaan myös, että avaruuden $\mathbb{R}^m$ jono $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$ on vapaa. Osoita, että jono $(A\bar{v}_1, \ldots, A\bar{v}_k)$ on vapaa.