Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2014
Harjoitus 3

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 19.9.2014 klo 19.30
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 3.10.2014 klo 19.30

Tehtäväsarja I

1. Eräs avaruuden $\mathbb{R}^2$ aliavaruus W on vektorien $\bar{u} = (-3, 4)$ ja $\bar{v} = (3/2, -2)$ virittämä.
   (a) Kirjoita tämä aliavaruus span-merkinnän avulla sekä joukkona samaan tapaan kuin määritelmässä 4.1.
   (b) Millaisia muotoa ovat aliavaruuden W vektorit? Oletetaan, että $\bar{w} \in W$. Kirjoita vektori $\bar{w}$ näkyviin komponentteineen.
   (c) Piirrä kuva aliavaruudesta W. (Täsmällisiä perusteluja ei tarvita.)

2. Määritä se taso T, joka sisältää suoran $S = \{(-3, 1, 2) + t(1, 0, 5) \mid t \in \mathbb{R}\}$ ja kulkee pisteen $P = (1, 2, 4)$ kautta. Anna vastauksesi muodossa $\{\bar{p} + s\bar{w} + t\bar{v} \mid s, t \in \mathbb{R}\}$.

Tehtäväsarja II

Tutustu kurssimateriaalin lukuun 5, jossa ratkaistaan lineaarisia yhtälöryhmiä.

3. (a) Onko $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$ yhtälön

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -3 \\ 2x_2 - 2x_3 = -4. \end{cases}$$

   ratkaisu?

   (b) Pitääkö jompikumpi seuraavista väitteistä paikkansa? Käytä apuna a)-kohtaa.

   Väite 1: Jos $x_1 = 0$, $x_2 = -1$ ja $x_3 = 1$, niin

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -3 \\ 2x_2 - 2x_3 = -4. \end{cases}$$

   Väite 2: Jos

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -3 \\ 2x_2 - 2x_3 = -4, \end{cases}$$

   niin $x_1 = 0$, $x_2 = -1$ ja $x_3 = 1$.

4. (a) Muuta matriisi

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 8 \end{array}\right]$$

alkeisrivitoimituksilla ensin porrasmatriisiksi ja sen jälkeen redusoiduksi porrasmatriisiksi.

(b) Ratkaise Gaussin-Jordanin eliminointimenetelmän ja edellisen tehtävän avulla yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ x_1 - 2x_2 + \ \ x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 \qquad\quad = 8. \end{cases}$$

5. Gaussin–Jordanin eliminointimenetelmällä on päädytty alla oleviin matriiseihin. Määritä yhtälöryhmien ratkaisut.

(a) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right]$ (b) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$ (c) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ (d) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$

6. Ratkaise Gaussin–Jordanin eliminointimenetelmällä yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 3 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$$

Tehtäväsarja III

Tämän tehtäväsarjan tehtävissä käytetään apuna Matlabia.

7. (a) Määrittele Matlabissa matriisi

```
A=[4 -11 12 10 0
50 5 7 1 6
-7 0 3 -10 -12
-11 8 4 5 5]
```

(b) Muuta edellisen kohdan matriisi redusoiduksi porrasmatriisiksi komennolla `rref(A)`. Tämän tehtävän vastausta ei tarvitse kirjoittaa ratkaisupaperiin.

8. Ratkaise Matlabin `rref`-komennon avulla yhtälöryhmä

$$\begin{cases} \qquad\ 3x_2 - 6x_3 + 6x_4 + 4x_5 = -5 \\ 3x_1 - 7x_2 + 8x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 9 \\ 3x_1 - 9x_2 + 12x_3 - 9x_4 + 6x_5 = 15. \end{cases}$$

Kirjoita ratkaisupaperiisi yhtälöryhmän ratkaisu.

9. Laboratoriossa viljellään eräässä koeputkessa kolmea bakteerikantaa (I, II ja III). Koeputkeen lisätään päivittäin 2 300 yksikköä ravintoa A, 800 yksikköä ravintoa B ja 1 500 yksikköä ravintoa C. Yksittäisen bakteerin päivässä kuluttamien ravintoyksiköiden määrä näkyy seuraavasta taulukosta:

	A	B	C
Bakteerikanta I	2	1	1
Bakteerikanta II	2	2	3
Bakteerikanta III	4	0	1

Ravinnon määrä rajoittaa bakteerikantojen kasvua. Jos bakteerit kuluttavat kaiken ravinnon, kuinka monta bakteeria kustakin kannasta voi elää koeputkessa? Muodosta tilannetta kuvaava yhtälöryhmä ja ratkaise se Matlabin avula.

Tehtäväsarja IV

10.* Gaussin–Jordanin eliminointimenetelmällä on päädytty alla olevaan matriisiin. Määritä yhtälöryhmän ratkaisu.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

11.* Merkitään $\bar{w} = (2, 11, 5)$, $\bar{v}_1 = (-2, 1, 1)$, $\bar{v}_2 = (2, 3, 1)$ ja $\bar{v}_3 = (-2, -1, 0)$. Halutaan tutkia, päteekö $\bar{w} \in \operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$. Millaista yhtälöä pitää tutkia? Millainen yhtälöryhmä siitä saadaan? Perustele vastauksesi.

Kun luennoitsija muokkasi alkeisrivitoimituksilla yhtälöryhmän matriisin redusoiduksi porrasmatriisiksi, oli tuloksena

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Päättele tämän perusteella, päteekö $\bar{w} \in \operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$. Jos pätee, kirjoita $\bar{w}$ vektoreiden $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ ja $\bar{v}_3$ lineaarikombinaationa.

Tehtäväsarja V

Tässä tehtäväsarjassa tutkitaan, kuinka matriisikertolasku liittyy yhtälöryhmiin.

12. (a) Laske matriisitulo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

(b) Tarkastellaan yhtälöryhmää

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \\ -2x_1 + x_3 = 1. \end{cases}$$

Keksi matriisi A ja vektorit $\bar{x}$ ja $\bar{b}$ siten, että yhtälöryhmä vastaa matriisiyhtälöä $A\bar{x} = \bar{b}$. Saat apua a)-kohdasta.

13. (a) Tutustu lauseeseen 10.1.

(b) Matriisilla

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

on käänteismatriisi

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 5 \\ 2 & 2 & -3 \\ -7 & -6 & 10 \end{bmatrix}.$$

Ratkaise käänteismatriisin A^{-1} avulla yhtälöryhmät

$$\begin{cases} 2x_1 & & - & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & & & = & 3 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} 2x_1 & & - & x_3 & = & -7 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & & & = & 2. \end{cases}$$

Tehtäväsarja VI

14. Lue tehtäväpaperin lopussa oleva selittävää lukutapaa koskeva teksti. Selitä sitten itsellesi samaan tapaan luentomateriaalin lauseen 9.12 b)-kohdan todistus.

15.* Oletetaan, että $n \times n$ -matriisit A ja B ovat kääntyviä. Osoita, että matriisin AB on kääntyvä näyttämällä, että sen käänteismatriisi on $B^{-1}A^{-1}$.

Tehtäväsarja VII

Tee tämän tehtäväsarjan tehtäviä samalla, kun tutustut lukuun 7.

16. Merkitään $\bar{u} = (1, -3)$, $\bar{v} = (-3, 8)$ ja $\bar{w} = (-3, 9)$.

(a) Etsi sellaiset reaaliluvut s ja t, että vektori $s\bar{u} + t\bar{v}$ on nollavektori. Piirrä kuva tilanteesta. Kuinka monella eri tavalla voit valita luvut s ja t? Onko jono $(\bar{u}, \bar{v})$ vapaa vai sidottu?

(b) Etsi sellaiset reaaliluvut s ja t, että vektori $s\bar{u} + t\bar{w}$ on nollavektori. Piirrä kuva tilanteesta. Kuinka monella eri tavalla voit valita luvut s ja t? Onko jono $(\bar{u}, \bar{w})$ vapaa vai sidottu?

Ylimääräinen tehtävä

Seuraava tehtävä on hieman haastavampi. Sillä voi korvata minkä tahansa tähdettömän tehtävän.

17. Millainen avaruuden $\mathbb{R}^3$ osajoukko on vektoreiden $\bar{v}_1 = (1, -2, -6)$, $\bar{v}_2 = (0, 3, 6)$ ja $\bar{v}_3 = (-1, -1, 0)$ virittämä aliavaruus $\operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$? Onko se suora, taso vai jotain muuta? Perustele.

Selittävä lukutapa

Kun luet todistusta, tee seuraavat asiat jokaisen lukemasi rivin (tai virkkeen) jälkeen:

- Yritä tunnistaa keskeisimmät rivillä käytetyt ideat.
- Pyri selittämään itsellesi jokainen päättelyaskel selvittämällä, miten se liittyy todistuksessa aiemmin esiintyneisiin asioihin tai aikasempiin tietoihisi. Voit sanoa selityksen ääneen tai kirjoittaa sen muistiin.
- Jos jokin asia on ristiriidassa oman käsityksesi kanssa, sano sekin ääneen (tai kirjoita muistiin).

Ennen kuin siirryt seuraavalle riville, kysy itseltäsi seuraavat asiat:

- Ymmärränkö, mitä ideoita käytettiin?
- Ymmärränkö, miksi tiettyä ideaa käytettiin?
- Miten tämä idea liittyy toisiin ideoihin tässä todistuksessa? Entä aikaisempaan tietooni asiasta?
- Auttavatko selitykseni vastaamaan esittämiini kysymyksiin?

Esimerkki

Seuraavassa on esitetty eräs lause todistuksineen. Sen jälkeen todistuksen vaiheet on selitetty edellä kuvatun menetelmän mukaisesti.

Lause: Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n$. Tällöin $\bar{v} + \bar{w} = \bar{w} + \bar{v}$.

Todistus: Oletetaan kuten lauseessa, että $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ ja $\bar{w} \in \mathbb{R}^n$.
Tällöin $\bar{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ ja $\bar{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ joillakin $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}$ ja $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{R}$.
Koska reaalilukujen yhteenlasku on vaihdannainen, jokaisella $i \in \{1, \ldots, n\}$ pätee $v_i + w_i = w_i + v_i$.
Nyt nähdään, että

$$\begin{aligned}\bar{v} + \bar{w} &= (v_1 + w_1,\ v_2 + w_2,\ \ldots,\ v_n + w_n) \\ &= (w_1 + v_1,\ w_2 + v_2,\ \ldots,\ w_n + v_n) = \bar{w} + \bar{v}.\end{aligned}$$

Selitys

- Lauseen mukaan vektoreiden yhteenlasku on vaihdannainen eli sillä ei ole väliä, miten päin vektorit lasketaan yhteen. Tämä pitäisi siis osoittaa.
- Oletuksena on, että $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ ovat avaruuden $\mathbb{R}^n$ mitä tahansa vektoreita.
- Vektoreissa $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ on n komponenttia. Kirjoitetaan komponentit näkyviin: $\bar{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ ja $\bar{w} = (w_1, \ldots, w_n)$, missä luvut $v_1, \ldots, v_n$ ja $w_1, \ldots, w_n$ ovat reaalilukuja. Vektoreiden komponentit ovat siis reaalilukuja, joista ei ole tarkempaa tietoa.
- Komponentit ovat reaalilukuja, joten niiden yhteenlaskun tiedetään olevan vaihdannainen. Ei siis ole väliä, kummin päin ne lasketaan yhteen. Mutta mihin ihmeeseen tätä tarvitaan ja miksi se kerrotaan tässä?

- Ryhdytään laskemaan summaa $\bar{v} + \bar{w}$. Tavoitteena on osoittaa, että se on sama kuin $\bar{w} + \bar{v}$. Vektoreiden yhteenlaskun määritelmän mukaan kahden vektorin summa saadaan laskemalla yhteen vektoreiden komponentit:

  $$\bar{v} + \bar{w} = (v_1 + w_1, \, v_2 + w_2, \, \dots, \, v_n + w_n).$$

  Nyt kukin komponenteista on kahden reaaliluvun summa, ja reaalilukujen summissa yhteenlaskettavien järjestys voidaan vaihtaa. Tähän siis tarvittiin edellisen kohdan huomiota! Eli nyt voidaan vaihtaa summattavien järjestys kussakin komponentissa:

  $$(v_1 + w_1, \, v_2 + w_2, \, \dots, \, v_n + w_n) = (w_1 + v_1, \, w_2 + v_2, \, \dots, \, w_n + v_n).$$

  Huomataan, että vektoreiden yhteenlaskun määritelmän mukaan

  $$(w_1 + v_1, \, w_2 + v_2, \, \dots, \, w_n + v_n) = \bar{w} + \bar{v}.$$

  Vektoreiden $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ järjestys saatiin siis vaihdettua.
- Todistuksen yhtälöketju osoittaa, että $\bar{v} + \bar{w} = \bar{w} + \bar{v}$. Siten väite on todistettu.