

Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2014
Harjoitus 2

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 12.9.2014 klo 19.30
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 26.9.2014 klo 19.30

Viimeisen tehtäväsarjan tehtävät ovat painoarvoltaan suurempia kuin muut tehtävät. Ne kannattaa siis tehdä!

Tehtäväsarja I

Lue luvusta 9 matriisien kertolaskusta.

1. Merkitään

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Laske seuraavista matriiseista ne, jotka ovat määriteltyjä:

$$BC, \quad CA, \quad AC, \quad A^3, \quad B^5.$$

2. Anna ja Bella ovat lähdössä ruokaostoksille ja vertailevat hintoja kahdessa lähikaupassaan. Alla olevassa taulukossa on heidän kauppalistansa:

	Maitoja	Sämpylöitä	Jogurtteja
Anna	3	4	10
Bella	2	8	5

Ruokatavaroiden hinnat eri kaupoissa ovat puolestaan alla:

	Kauppa 1	Kauppa 2
Maito	1,10 e	1,15 e
Sämpylä	1,40 e	1,30 e
Jogurtti	0,50 e	0,60 e

Anna ja Bella laskevat matriisitulon

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 10 \\ 2 & 8 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,10 \text{ e} & 1,15 \text{ e} \\ 1,40 \text{ e} & 1,30 \text{ e} \\ 0,50 \text{ e} & 0,60 \text{ e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13,90 \text{ e} & 14,65 \text{ e} \\ 15,90 \text{ e} & 15,70 \text{ e} \end{bmatrix}.$$

Mitä he voivat siitä päätellä?

3. Etsi tietokone, jossa on MATLAB-ohjelma. Sellaisia löytää esimerkiksi tietokoneluokasta C128. Ryhdy sitten tekemään seuraavaa tehtävää. Jos tarvitset apua, ohjaajat päivystävät luokassa C128 seuraavina aikoina: ti 10–12, to 16–18, pe 14–16.

4. Tee MATLAB-tehtävä, joka löytyy kurssisivulla olevasta erillisestä tiedostosta. Vastauksia ei tarvitse kirjoittaa ylös, vaan tehtävien tekeminen tietokoneella riittää.

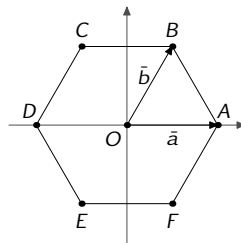
5.* Merkitään

$$H = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Osoita, että matriisin H käänteismatriisi on M . Onko matriisi H kääntyvä? Entä matriisi M ?

Tehtäväsarja II

6.* Oheisessa kuvassa pisteet A, B, \dots, F ovat säännöllisen kuusikulmion kärkipisteitä. Lausu vektorien \vec{a} ja \vec{b} lineaarikombinaationa suuntajanat \overline{AD} , \overline{AC} ja $\overline{BC} + \overline{DE} + \overline{FA}$. Muista perustella vastauksesi.



7.* Tutkitaan suoraa, jonka yhtälö on $y = -5x + 2$. Kirjoita suora muodossa $\{\vec{p} + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$. Muista perustella vastauksesi.

Tutustu kurssimateriaalin lukuun 3, jossa käsitellään tasoja.

8. Merkitään $A = (-3, 1, 2)$, $B = (2, 4, 1)$ ja $C = (12, 0, -1)$. Tarkastellaan tasoa T , joka kulkee pisteiden A , B ja C kautta. Kirjoita taso T muodossa

$$\{\vec{p} + s\vec{w} + t\vec{v} \mid s, t \in \mathbb{R}\}.$$

Tehtäväsarja III

Tutustu kurssimateriaalin lukuun 4, jossa käsitellään vektorien virittämiä aliavaruuksia.

9. Merkitään $\vec{v} = (3, -1)$.

- Keksi jokin vektorin \vec{v} lineaarikombinaatio.
- Kirjoita joukko, jonka muodostavat vektorin \vec{v} kaikki lineaarikombinaatiot. Käytä joukkomerkinä, joka on muotoa $\{\text{alkio} \mid \text{ehto, jonka alkio toteuttaa}\}$.
- Havainnollista b-kohdassa muodostamaasi joukkoa piirtämällä se koordinaatistoon.
- Mitä tarkoittaa merkintä $\text{span}(\vec{v})$?

10. Merkitään $\vec{v} = (3, -1)$ ja $\vec{w} = (1, 2)$.

- Keksi jokin vektoreiden \vec{v} ja \vec{w} lineaarikombinaatio.

- (b) Kirjoita joukko, jonka muodostavat vektoreiden \bar{v} ja \bar{w} kaikki lineaarikombinaatiot. Käytä vastaavaa joukkomerkintää kuin edellisessä tehtävässä.
- (c) Mitä tarkoittaa merkintä $\text{span}(\bar{v}, \bar{w})$?

11. Merkitään $\bar{v}_1 = (1, 2, 3)$ ja $\bar{v}_2 = (4, 5, 6)$.

- (a) Kirjoita aliavaruus $\text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ joukkona.
- (b) Luettele neljä alkioita vektorien \bar{v}_1 ja \bar{v}_2 virittämästä aliavaruudesta $\text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$.
- (c) Jos piirtäisit kuvan vektorien \bar{v}_1 ja \bar{v}_2 virittämästä aliavaruudesta $\text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$, mitä se suunnilleen näyttäisi? Voit hahmotella kuvan tai selittää sanallisesti. Tarkkaa piirustusta ei tarvita.

12.* Joukko $W = \{(-3k, 4k, k) \mid k \in \mathbb{R}\}$ erään vektorin virittämä aliavaruus. Etsi sille virittäjävektori.

Tehtäväsarja IV

Kirjoita tämän tehtäväsarjan ratkaisut *eri paperille kuin muut ratkaisut*. Nido paperi kuitenkin yhteen muiden ratkaisujen kanssa. Opiskelijoiden ratkaisut näihin tehtäviin kerätään talteen ja niitä käytetään kurssia koskevassa tutkimuksessa. Tehtäväsarjan tehtävistä saa tuplapisteet: kukin tehtävä vastaa kahta tavallista tehtävää.

13. Tässä tehtävässä kannattaa välttää turhia laskuja.

- (a) Pitääkö paikkansa, että $(5, 6, 1) \in \text{span}((2, 0, 0), (0, 7, 0))$?
- (b) Pitääkö paikkansa, että $(4, 6) \in \text{span}((2, 3), (-12, -18))$?

14. Joukko $W = \{(s+4t, s+2t, 3s-t) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$ on kahden vektorin virittämä aliavaruus. Määritä jotkin sen virittäjävektorit.

15. Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n$. Osoita, että \bar{v} ja \bar{w} ovat aliavaruuden $\text{span}(\bar{v}, \bar{v} + \bar{w})$ alkioita.