

**Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I**  
**Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos**  
**Syksy 2014**  
**Harjoitus 1**

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 5.9.2014 klo 19.30  
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 19.9.2014 klo 19.30

**Tehtäväsarja I**

Tutustu kurssimateriaalin lukuun 1, joissa käsitellään avaruuksien  $\mathbb{R}^2$  ja  $\mathbb{R}^3$  vektoreita.

Tehtävissä 1–4 tutkitaan vektoreita  $\bar{a} = (0, -2)$ ,  $\bar{b} = (3, 1)$  ja  $\bar{c} = (-2, -1)$ .

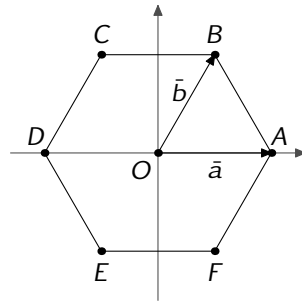
- Piirrä kuva, jossa havainnollistat näitä avaruuden  $\mathbb{R}^2$  vektoreita
  - koordinaatiston pisteinä
  - koordinaatiston pisteiden paikkavektoreina.
- Havainnollista vektoria  $\bar{a}$  suuntajanalla, jonka lähtöpiste on  $P = (3, 1)$ . Mikä on tämän suuntajan pään päätepiste? Piirrä kuva ja kirjoita lisäksi näkyviin lasku, jolla päätepisteen saa selville.
  - Havainnollista vektoria  $\bar{c}$  suuntajanalla, jonka päätepiste on  $Q = (-1, 1)$ . Mikä on tämän suuntajan lähtöpiste? Piirrä kuva ja kirjoita lisäksi näkyviin lasku, jolla lähtöpisteen saa selville.
- Määritä vektorit  $\bar{a} + \bar{b}$ ,  $\bar{b} - \bar{c}$  ja  $\bar{c} - \bar{a}$ 
  - piirtämällä niitä vastaavat suuntajanat koordinaatistoon ja päättelämällä tulos ilman laskuja
  - laskemalla ilman kuvaa.
- \* Määritä lineaarikombinaatio  $-3\bar{a} + 2\bar{c}$  ja havainnollista sitä kuvalla. Miten kuvassa näkyvät luvut  $-3$  ja  $2$ ?

**Tehtäväsarja II**

- Piirrä koordinaatistoon suuntajana  $\overline{AB}$  ja määritä sitä vastaava avaruuden  $\mathbb{R}^2$  vektori, jos
  - $A = (1, -1)$  ja  $B = (4, 2)$
  - $A = (2, 3/2)$  ja  $B = (1/2, 3)$

Miten saat laskettua kysytyn vektorin komponentit pisteiden  $A$  ja  $B$  koordinaateista?

6. Selvitä, missä ohjausluokka C323 on ja käy piipahtamassa siellä. Voit halutessasi jäädä luokkaan tekemään tehtäviä ja keskustelemaan ohjaajien ja toisten opiskelijoiden kanssa. Jos luokassa on täyttä, löydät ohjaajia myös 3. kerroksen käytävältä.
7. Oheisessa kuvassa pisteet  $A, B, \dots, F$  ovat säännöllisen kuusikulmion kärkipisteitä. Keskipisteenä on origo. Kirjoita suuntajanaat  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  ja  $\overline{CF}$  vektorien  $\vec{a}$  ja  $\vec{b}$  lineaarikombinaatioina.



Tutustu kurssimateriaalin lukuun 2, jossa käsitellään  $n$ -ulotteista vektoriavaruutta  $\mathbb{R}^n$ .

8.\* Oletetaan, että  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$ .

- (a) Sievennä lauseke  $-3(\vec{a} - \vec{c}) + 2(\vec{a} + 2\vec{b}) - 3(\vec{c} - \vec{b})$ .
- (b) Onko a-kohdan tulos vektoreiden  $\vec{a}, \vec{b}$  ja  $\vec{c}$  lineaarikombinaatio?

### Tehtäväsarja III

Tutustu kurssimateriaalin lukuun 3.1, jossa käsitellään suoria.

9. Suoran *suuntavektoriksi* nimitetään vektoria, joka saadaan, kun kahden suoralla olevan pisteen välille piirretään suuntajana, ja tämä jana tulkitaan vektoriksi.

Piirrä seuraavia yhtälöitä vastaavat suorat koordinaatistoon ja etsi jokaiselle suorista suuntavektori.

$$(a) \quad y = x + 4 \qquad (b) \quad 2x - 4y = 6 \qquad (c) \quad x = -3$$

10. Suoran *paikkavektoriksi* nimitetään vektoria, joka saadaan, kun mikä tahansa suoran piste tulkitaan vektoriksi (pisteen koordinaateista tulee vektorin komponentit). Määritä edellisen tehtävän suorille jotkin paikkavektorit.

11. Tarkastellaan suoraa  $S = \{(0, 2) + t(-1, 3) \mid t \in \mathbb{R}\}$ .

- (a) Määritä neljä vektoria joukosta  $S$  valitsemalla parametrille  $t$  eri arvoja.

- (b) Havainnollista a-kohdassa valitsemiasi vektoreita piirtämällä koordinaatistoon niitä vastaavat pisteet.
- (c) Havainnollista a-kohdassa valitsemiasi vektoreita piirtämällä koordinaatistoon niitä vastaavien pisteiden paikkavektorit.
- (d) Piirrä koordinaatistoon suora  $S$ .

12.\* Piirrä kuvat seuraavista suorista ja päättele kuvien avulla, mitkä niistä ovat samoja.

$$S_1 = \{(1, 2) + t(2, -1) \mid t \in \mathbb{R}\} \quad S_2 = \{(2, 2) + s(-4, 2) \mid s \in \mathbb{R}\}$$

$$S_3 = \{(0, 3) + k(-1, 1/2) \mid k \in \mathbb{R}\}$$

#### Tehtäväsarja IV

- 13. Merkitään  $A = (2, 3, 6)$  ja  $B = (4, -7, -3)$ . Tarkastellaan suoraa  $S$ , joka kulkee pisteiden  $A$  ja  $B$  kautta. Kirjoita suora  $S$  vektorimuodossa  $\{\bar{p} + t\bar{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$ .
- 14. Määritä edellisen tehtävän suoran ja  $xy$ -tason leikkauspiste.

#### Tehtäväsarja V

Tutustu kurssimateriaalin lukuun 9, jossa käsitellään matriiseja.

- 15. Merkitään

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Laske seuraavista matriiseista ne, jotka ovat määriteltyjä:

- (a)  $B + D$
- (b)  $A + B$
- (c)  $A + C$
- (d)  $(-3)C$
- (e)  $2D - B$