Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kurssikoe 22.10.2014
Ratkaisuehdotus

1. Selvitä seuraavissa tapauksissa, kuinka monta ratkaisua yhtälöryhmällä on. Perustele vastauksesi.

   (a) Yhtälöryhmää vastaava matriisi on saatu alkeisrivitoimituksilla muotoon

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

   (b) Yhtälöryhmän kerroinmatriisin voi muuttaa alkeisrivitoimituksilla ykkösmatriisiksi.

   (c) Yhtälöryhmän kerroinmatriisin determinantti on $-1/2$.

Ratkaisuehdotus:

(9 pistettä)

(a) Matriisi on porrasmuodossa, joten siitä voi päätellä suoraan ratkaisujen lukumäärän. Epätosia yhtälöitä ei ole, joten ratkaisuja on olemassa. Toisessa sarakkeessa ei ole johtavaa alkiota, joten ratkaisuja on äärettömän monta. (3 pistettä)

(b) Tapa 1: Koska kerroinmatriisin voi muuttaa alkeisrivitoimituksilla ykkösmatriisiksi, se on kääntyvä. Siten yhtälöryhmällä on täsmälleen yksi ratkaisu. (3 pistettä)

Tapa 2: Koska kerroinmatriisi voidaan alkeisrivitoimiituksilla ykkösmatriisiksi, ei epätosia yhtälöitä ole ja toisaalta jokaisessa (pystyviivan vasemmalla puolella olevassa) sarakkeessa on johtava alkio. Siten ratkaisuja on täsmälleen yksi. (3 pistettä)

(c) Koska kerroinmatriisin determinantti ei ole nolla, se on kääntyvä. Siten yhtälöryhmällä on täsmälleen yksi ratkaisu. (3 pistettä)

2. (a) Halutaan tutkia, onko avaruuden $\mathbb{R}^4$ vektoreista koostuva jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4)$ vapaa.

   i. Millaista yhtälöä on tutkittava?

   ii. Oletetaan, että yhtälön ratkaiseminen johtaa tehtävän 1 a-kohdassa mainittuun yhtälöryhmään. Onko jono vapaa?

   (b) Oletetaan, että $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3 \in \mathbb{R}^n$. Osoita, että $\bar{v}_1 \in \operatorname{span}(\bar{v}_1 - 2\bar{v}_2,\ \bar{v}_2,\ 2\bar{v}_2 + \bar{v}_3)$.

Ratkaisuehdotus:

(10 pistettä)

(a) i. On tutkittava yhtälöä $x_1\bar{v}_1 + x_2\bar{v}_2 + x_3\bar{v}_3 + x_4\bar{v}_4 = \bar{0}$, missä $a_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$. (2 pistettä)

ii. Edellisessä tehtävässä todettiin, että yhtälöryhmällä on äärettömän monta ratkaisua. Siten yhtälön $x_1\bar{v}_1 + x_2\bar{v}_2 + x_3\bar{v}_3 + x_4\bar{v}_4 = \bar{0}$ ainoa ratkaisu ei ole $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$. Näin ollen jono ei ole vapaa. (4 pistettä)

(b) Huomataan, että $\bar{v}_1 = \bar{v}_1 - 2\bar{v}_2 + 2\bar{v}_2 + 0(2\bar{v}_2 + \bar{v}_3)$. Siten $\bar{v}_1 \in \operatorname{span}(\bar{v}_1 - 2\bar{v}_2,\ \bar{v}_2,\ 2\bar{v}_2 + \bar{v}_3)$. (4 pistettä)

3. (a) Onko joukko $W = \{(-3,4) + (1,2)t \mid t \in \mathbb{R}\}$ avaruuden $\mathbb{R}^2$ aliavaruus?

(b) Anna esimerkki avaruuden $\mathbb{R}^3$ kaksiulotteisesta aliavaruudesta. Perustele vastauksesi.

(c) Halutaan selvittää virittävätkö vektorit $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ ja $\bar{v}_3$ avaruuden $\mathbb{R}^3$. Kun tutkitaan, onko vektori $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}$ vektorien $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ ja $\bar{v}_3$ lineaarikombinaatio, päädytään matriisiin

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & a_3 - 2a_2 \\ 0 & 1 & 0 & 2a_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 - a_2 - a_3 \end{array}\right].$$

Virittävätkö vektorit avaruuden $\mathbb{R}^3$?

Ratkaisuehdotus:

(16 pistettä)

(a) Ei ole. Luentomateriaalin lauseen mukaan aliavaruus sisältää aina nollavektorin. Osoitetaan, että $(0,0) \notin W$. Jos $(-3,4) + (1,2)t = (0,0)$ jollakin $t \in \mathbb{R}$, niin $3 + t = 0$ ja $4 + 2t = 0$, joten $t = -3$ ja $t = -2$. Tämä on ristiriita, joten $(0,0)$ ei ole joukon W alkio. (4 pistettä)

(b) Valitaan esimerkiksi aliavaruus $U = \operatorname{span}((1,2,3),(0,1,4))$. Koska vektorit $(1,2,3)$ ja $(0,1,4)$ eivät ole yhdensuuntaisia, jono $((1,2,3),(0,1,4))$ on vapaa. Lisäksi se virittää aliavaruuden U. Siten kyseessä on U:n kanta. Näin ollen aliavaruuden U dimensio on kaksi. (6 pistettä)

(c) On tutkittava, onko yhtälöllä $x_1\bar{v}_1 + x_2\bar{v}_2 + x_3\bar{v}_3 = \bar{a}$ ratkaisu. (Tässä $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$.) Matriisista nähdään, ratkaisua ei ole, jos $a_1 - a_2 - a_3 \neq 0$. Siten esimerkiksi vektori $(1,0,0)$ ei ole vektorien $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ ja $\bar{v}_3$ lineaarikombinaatio. Siten vektorit eivät viritä avaruutta $\mathbb{R}^3$. (6 pistettä)

4. Merkitään $\bar{w} = (-2,1)$ ja $\bar{v} = (3,-4)$.

(a) Määritä laskemalla projektio $\operatorname{proj}_{\bar{w}}(\bar{v})$.

(b) Piirrä kuva vektoreista $\bar{v}$, $\bar{w}$, $\operatorname{proj}_{\bar{w}}(\bar{v})$ ja $\bar{v} - \operatorname{proj}_{\bar{w}}(\bar{v})$. Selitä omin sanoin, miten erotusvektori $\bar{v} - \operatorname{proj}_{\bar{w}}(\bar{v})$ liittyy projektion määritelmään.

(c) On olemassa 2×2 -matriisi A, jolla kertominen projisoi vektorit $\bar{w}$:n virittämälle aliavaruudelle. Toisin sanoen kaikilla $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ pätee $A\bar{x} = \operatorname{proj}_{\bar{w}}(\bar{x})$. Matriisilla A on kaksi ominaisarvoa. Mitkä ne ovat? Tarkkoja perusteluja ei tarvita, vaan voit nojata perusteluissasi esimerkiksi kuvaan.

Ratkaisuehdotus:

(12 pistettä)

(a)

$$\text{proj}_{\bar{w}}(\bar{v}) = \frac{(3,-4)\cdot(-2,1)}{(-2,1)\cdot(-2,1)}(-2,1) = \frac{-10}{5}(-2,1) = (4,-1)$$

(2 pistettä)

(b) Kuva 2 pistettä.

Porjektion määritelmän mukaan erotusvektorin $\bar{v} - \text{proj}_{\bar{w}}(\bar{v})$ on oltava kohtisuorassa vektoria $\bar{w}$ vastaan. (2 pistettä)

(c) Kuvan perusteella vektori $\bar{w}$ on oma projektionsa. Täsmällisesti tämän voi todeta laskemalla:

$$\text{proj}_{\bar{w}}(\bar{w}) = \frac{\bar{w}\cdot\bar{w}}{\bar{w}\cdot\bar{w}}\bar{w} = 1\bar{w} = \bar{w}.$$

Toisin sanoen $A\bar{w} = 1\bar{w}$. Siten 1 on matriisin A ominaisarvo, ja eräs sitä vastaava ominaisvektori on $\bar{w}$.

Vektori $\bar{v} - \text{proj}_{\bar{w}}(\bar{v})$ on kohtisuorassa vektoria $\bar{w}$ vastaan. Kuvan peruteella sen projektio on nollavektori. Tämänkin voi osoittaa laskemalla. Merkitään $\bar{u} = \bar{v} - \text{proj}_{\bar{w}}(\bar{v})$. Nyt

$$\text{proj}_{\bar{w}}(\bar{u}) = \frac{\bar{u}\cdot\bar{w}}{\bar{w}\cdot\bar{w}}\bar{w} = \frac{0}{\bar{w}\cdot\bar{w}}\bar{w} = 0\bar{w} = \bar{0}.$$

Näin ollen $A\bar{u} = 0\bar{u}$. Siten 0 on matriisin A ominaisarvo, ja eräs sitä vastaava ominaisvektori on $\bar{v} - \text{proj}_{\bar{w}}(\bar{v})$.

Kysytyt ominaisarvot ovat siis 1 ja 0. (6 pistettä)