

## KURSSIPÄIVÄKIRJA/RHS

4.9.2014

Tervetuloa kurssille.

Kompleksianalyysi on analyysia kompleksiluvuilla.

Mitä kompleksiluvut ovat?

Kysely.

Kirjallisuutta.

$i^2 = -1$  on historiallinen lähtökohta, mutta haluamme 'big picture'n, kun alamme pian derivoida ja integroida. On helpompi ajatella, että kompleksitaso on vain  $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ ; siis reaalitasen alkioiden määritelmä kertolasku  $\cdot$  siten, että  $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$  on kunta.

Motivaatio kurssille.

Kompleksianalyysia tarvitaan.

Lyhin tie reaalianalyysin ongelman ja sen ratkaisun välillä kulkee joskus kompleksianalyysin kautta.

Kertokaa painovirheet vaikka e-maililla.

Luennot Luvun 1 alusta Huomautukseen 1.24 asti.

5.9.2014

1. kurssikoe on 24.10.2014 klo 13–15.

Lisäkysely.

Kertaus parilla lisäesimerkillä.

Luennot Huomautuksesta 1.24 De Moivre'n kaavojen todistuksen loppuun, luennot lisättynä muutamalla esimerkillä.

11.9.2014

De Moivre'n kaavojen sovelluksista Luvun 1 loppuun, lisättynä parilla lisäesimerkillä.

Kompleksitasen topologiaa-luvusta funktion  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  raja-arvon määrittelyyn joukon  $A$  kasautumispisteessä.

12.9.2014

Funktion raja-arvoon liittyen pari esimerkkiä.

Funktion jatkuvuudesta, ja Kompleksitasen topologiaa-luvun loppuun.

Kompleksinen derivointi.

---

*Date:* December 5, 2014.

*Key words and phrases.* Complex numbers, Complex valued functions, Analytic functions.

Analyyttinen funktio. Esimerkkejä. Myös esimerkki funktiosta, joka ei ole analyttinen,  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = \bar{z}$ .

Karakterisointi kehitelmän avulla kompleksisen derivaatan olemassaololle pisteessä.

Pisteessä  $z_0$  kompleksisesti derivoituva funktio on jatkuva pisteessä  $z_0$ .

18.9.2014

Algebralliset derivoimissäännöt ja niiden todistaminen.

Derivoimissääntöjen korollaareja.

Lisäesimerkkejä, joissa hyödynnetään derivoimissääntöjä.

Cauchyn-Riemannin yhtälöiden johtaminen.

19.9.2014

Funktion reaalisen differentioituvuuden ja Cauchyn-Riemannin yhtälöiden avulla kompleksisen derivaatan olemassaolon karakterisointilause ja lauseen todistus.

Lisäesimerkkejä.

25.9.2014

Vakiofunktioista.

Harmonisista funktioista.

Lisäesimerkkejä.

Aloitimme sarjateorian.

26.9.2014

Abelin lause.

Abelin lauseen korollaareja.

Cauchyn-Hadamardin kaava.

Esimerkkejä.

2.10.2014

'Suppenemiskiekossaan kompleksinen potenssisarja esittää analyttistä funktiota'-lause ja sen todistus ja korollaari.

Eksponenttifunktion määrittely ja perusominaisuudet Lauseeseen 5.4 asti.

9.10.2014

Eksponenttifunktion perusominaisuuksia.

Kompleksisista trigonometrisista funktioista.

Kompleksisista hyperbolisista trigonometrisista funktioista.

Kompleksisesta logaritmistä.

10.10.2014

Logaritmin haaran määrittely ja sen ominaisuuksia.

Jos  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  ja  $a \in \mathbb{C}$ , niin määriteltiin  $z^a = \exp(a \log z)$ .

Jos  $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  ja  $\alpha \in \mathbb{R}$ , niin määriteltiin kuvaus  $z \mapsto z^a$  alueessa

$$\Omega_\alpha = \{z = r \exp(i\theta) : r > 0, \alpha < \theta < \alpha + 2\pi\}.$$

Kuvaus on yleisen potenssifunktion haara.

Lisäesimerkkejä.

16.10.2014

Polku, vastapolku, suljetun polun suunnistus, tulopolku,  $C^1$ -polku, Polun uudelleen parametrisointi. Integraali yli reaalisen välin.

Polkuintegraali: integraali pitkin polkua/käyrää ja integraali yli polun/käyrän.

Esimerkkejä.

Lisäesimerkkejä.

17.10.2014

Paloittain  $C^1$ -polku.

Integraalin invarianssi eli polun uudelleen parametrisointi ei muuta integraalin arvoa.

Tekniset lemmat: integraalin lineaarisuus, tulopolun integraali ja vastapolun integraali.

Integraali polun kaarenpituuden suhteen ja sen perusominaisuudet.

Arviolemma.

Lisäesimerkkejä.

Kurssikoe on 24.10.2014 klo 13–15.

Kurssikoealueen muodostavat Luvut 1–5.

30.10.2014

Integraalifunktion peruslauseita.

Integraalifunktion karakterisaatiolause.

Lisäesimerkkejä.

31.10.2014

Cauchyn-Goursatin lemma.  
Cauchyn-Goursatin teoreema.  
Lisäesimerkki.

6.11.2014

Cauchyn integraalikaavan lokaalimuoto.  
Analyyttisen funktion lokaali sarjaesitys.  
Lokaalin sarjaesityksen korollaareja: Korollaari 1: Jokainen analyttinen funktio on äärettömän monta kertaa derivoituva. Korollaari 2: Yleistetty Cauchyn integraalikaava.  
Lisäesimerkkejä.

7.11.2014

Moreran lause.  
Liouvillen lause.  
Polynomisen kasvun lause.  
Algebran peruslause.  
Analyyttisen funktion nollakohdista.  
Maksimiperiaatteesta: Gaussin keskiarvolause, Maksimiperiaatteen heikko muoto, Maksimiperiaatteen vahva muoto.

13.11.2014

Schwarzin lemma.  
Lisäesimerkki.  
Sykli ja kierrosluku ja Kierroslukulemma.  
Lisäesimerkkejä.

14.11.2014

Komponenttilause.  
Cauchyn integraalikaavan globaali versio (tänään vain runko todistuksesta) ja sen korollaareja.  
Lisäesimerkkejä.

20.11.2014

Cauchyn integraalikaavan globaalin version todistus.  
Deformaatiolause.  
Esimerkki.

21.11.2014

Esimerkki Cauchyn integraalikaavan globaalin version käytöstä.  
Laaennetusta kompleksitasosta.  
Esimerkkejä Möbius-kuvauksista: siirto, venytys/kutistus, kierto, inversio.  
Möbius-kuvausten määrittely.

27.11.2014

Möbius-kuvauksista.

28.11.2014

Lisää Möbius-kuvauksista.

4.12.2014

Konformikuvaustehtävistä.

5.12.2014

Lisää konformikuvaustehtävistä.  
Kertaus.

Kurssikoe on 16.12.2014 klo 13–15.  
Kurssikoealueen muodostavat Luvut 6–11.

Kurssille aktiivisesti osallistuneiden pyynnöstä on vielä erikoiskoe 18.12.2014 klo 13–15, jolla voi korottaa 1. kurssikokeen tulosta.

Kiitos erinomaisesta kurssi-ilmapiiiristä luennoilla!