Inledning till universitetsmatematik, hösten 2013

Komplexa tal

Motivering: Det finns polynomekvationer utan reella rötter, exempelvis

$$x^2 = -1 \qquad (i)$$

Utvidgning av de reella talen så att ekvationen (i) har en lösning leder till komplexa tal.

Definition: Mängden av komplexa tal $\mathbb{C}$ är mängden av alla talpar:

$$\{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$$

utrustad med en summa och en produkt som definieras på följande sätt:

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$$
$$(a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd, ad + bc)$$

- Vi identifierar ett reellt tal a med det komplexa talet $(a,0)$.

- Man kan visa, att komplexa tal satisfierar samma räkneregler som de reella talen:
$x+y = y+x$, $xy = yx$, $(x+y)+z = x+(y+z)$, $(xy)z = (xy)z$, $x(y+z) = xy+xz$ o.s.v. för $x = (a,b)$, $y = (c,d)$, $z = (e,f)$.

Komplexa talet $i = (0,1)$ kallas för **imaginära enheten**. Notera:

$$i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (0-1, 0+0) = (-1,0) = -1,$$

d.v.s. $x^2 = -1$ har komplexa lösningen i.

Ofta skrivs ett komplext tal (a,b) i formen $a+bi$. Detta kan göras eftersom

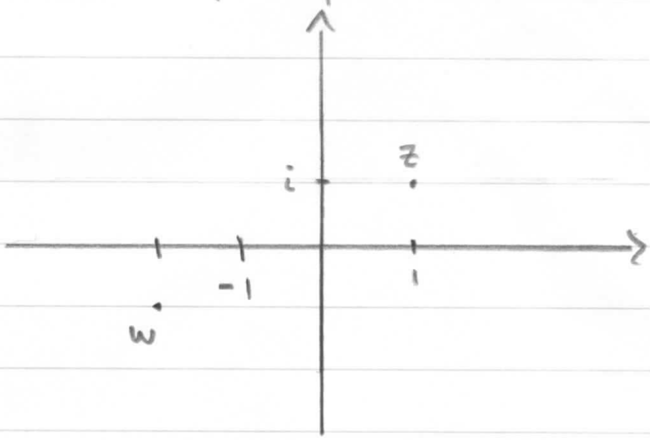
$$\begin{aligned}(a,b) = (a,0) + (0,b) &= (a,0) + (b,0)\cdot(0,1) \\ &= (a,0) + (b,0)\cdot i \\ &= a + bi\end{aligned}$$

Således, $\mathbb{C} = \{ a+bi \mid a,b \in \mathbb{R} \}$

Exempel 1: Låt $z = 1+i$ och $w = -2-i$. Beräkna $z+w$ och zw.

$$\begin{aligned} z+w &= 1+i+(-2-i) \\ &= 1+i-2-i \\ &= -1 \end{aligned}$$

Komplexa planet:



$$\begin{aligned} zw &= (1+i)(-2-i) \\ &= -2-i-2i-i^2 \\ &= -2-3i+1 \\ &= -1-3i \end{aligned}$$

fre 7.9

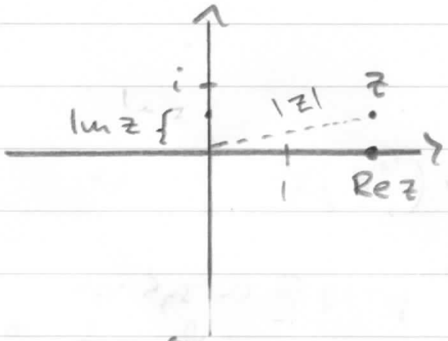
Låt $a, b \in \mathbb{R}$ och $z = a + bi$.

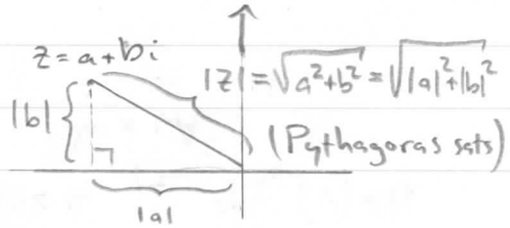
$\operatorname{Re} z = a$: realdelen av z

$\operatorname{Im} z = b$: imaginärdelen av z.

$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$: absolutbeloppet, eller modulen, av z

$\overline{z} = a - bi$: konjugatet till z.





$|z|$ = avståndet mellan punkten z och origo.

<u>Sats 2</u>: Låt $z \in \mathbb{C}$. Då är $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$

<u>Bevis</u>: Låt $a, b \in \mathbb{R}$ så att $z = a + bi$.

Vi får

$$\begin{aligned} z \cdot \overline{z} &= (a+bi)(a-bi) \\ &= a^2 - abi + abi - (bi)^2 \\ &= a^2 - b^2 i^2 \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

$\boxed{i^2 = -1}$

<u>fre 13.9</u>

Alltså $|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$ $\square$

($\square$ markerar att beviset är avslutat)

Låt $z \in \mathbb{C}$. Om $\operatorname{Re} z = 0$ och $\operatorname{Im} z \neq 0$ så kallas talet z <u>rent imaginärt</u>. Om $\operatorname{Im} z = 0$ så är talet z reellt.

<u>Exempel 3:</u> Låt $z = a+5i$, där $a \in \mathbb{R}$. För vilka värden på a är z^2 rent imaginärt? När är z^2 reellt?

- $z^2 = (a+5i)^2 = a^2 + 10ai + 25i^2$
  $= a^2 - 25 + 10ai$

<u>Rent imaginärt:</u> $\mathrm{Re}\, z^2 = 0$ om och endast om $a^2 = 25$, d.v.s. om och endast om $a = 5$ eller $a = -5$.

Då är också $\mathrm{Im}\, z^2 = 10a = \pm 50 \neq 0$.

Alltså är z^2 rent imaginärt om och endast om $a = 5$ eller $a = -5$.

<u>Reellt:</u> $\mathrm{Im}\, z^2 = 0$ om och endast om $10a = 0$, d.v.s. $a = 0$.

Alltså är z^2 reellt om och endast om $a = 0$.

Varje komplext tal $z = a+bi$ har en additiv invers, $\underline{-a-bi}$ eftersom,

$$z + (-a-bi) = a+bi + (-a-bi) = (a-a) + (b-b)i = 0$$

och $$-a-bi + z = -a-bi + a+bi = (-a+a) + (-b+b)i = 0.$$

Vi betecknar den additiva inversen med $-z$.

Varje komplext tal $z \neq 0$ har en multiplikativ invers, $\underline{\frac{1}{|z|^2}\bar{z}}$ eftersom,

$$z \cdot \frac{1}{|z|^2}\bar{z} = \frac{z\bar{z}}{|z|^2} = \frac{|z|^2}{|z|^2} = 1$$

och $$\frac{1}{|z|^2}\bar{z} \cdot z = \frac{\bar{z}z}{|z|^2} = \frac{|z|^2}{|z|^2} = 1.$$

$\boxed{\text{Sats 2: } z\bar{z} = |z|^2}$

Notera, att $z \neq 0$ implicerar att $|z| > 0$ och därmed också $|z|^2 > 0$. Alltså är $\frac{1}{|z|^2}\bar{z}$ väldefinierad.

Den multiplikativa inversen betecknas med z^{-1} eller $\frac{1}{z}$.

Differensen och kvoten av z och w definieras som

$z - w = z + (-w)$ och $\frac{z}{w} = z \cdot w^{-1}$ då $w \neq 0$.

<u>Exempel 4</u>: Låt $z = 2 - \frac{1}{2}i$, $w = -1-3i$

Räkna $z-w$ och $\frac{z}{w}$.

- $$z - w = 2 - \frac{1}{2}i - (-1-3i) = 2 - \frac{1}{2}i + 1 + 3i = 3 + \frac{5}{2}i$$

- $$\frac{z}{w} = z \cdot \frac{1}{|w|^2}\bar{w} = \left(2 - \frac{1}{2}i\right) \cdot \frac{1}{1^2+3^2}(-1+3i)$$
$$= \frac{1}{10}\left(2 - \frac{1}{2}i\right)(-1+3i)$$
$$= \frac{1}{10}\left(-2 + 6i + \frac{1}{2}i - \frac{3}{2}i^2\right)$$
$$= \frac{1}{10}\left(-\frac{1}{2} + \frac{13}{2}i\right) = -\frac{1}{20} + \frac{13}{20}i$$

"Alternativ":

$$\frac{z}{w} = \frac{2 - \frac{1}{2}i}{-1-3i} = \frac{(2-\frac{1}{2}i)(-1+3i)}{(-1-3i)(-1+3i)} = \frac{-2+6i+\frac{1}{2}i-\frac{3}{2}i^2}{1-3i+3i-9i^2}$$
$$= \frac{-\frac{1}{2} + \frac{13}{2}i}{10}$$
$$= -\frac{1}{20} + \frac{13}{20}i$$

multipl täljaren och nämnaren med $\bar{w}$.

Exempel 5: Bestäm Re z och Im z då

(a) $z = \frac{5}{1+i}$, (b) $z = \frac{5i}{1+i} - \frac{1}{i}$

(a) $$z = \frac{5}{1+i} = \frac{5(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{5-5i}{1-i^2}$$

$$= \frac{5-5i}{2}$$

$$= \frac{5}{2} - \frac{5}{2}i$$

$\therefore \operatorname{Re} z = \frac{5}{2}$, $\operatorname{Im} z = -\frac{5}{2}$

(b) $$z = \frac{5i}{1+i} - \frac{1}{i} = \frac{5i(1-i)}{(1+i)(1-i)} - \frac{i}{i^2}$$

$$= \frac{5i - 5i^2}{1-i^2} - \frac{i}{-1}$$

$$= \frac{5i+5}{2} + i$$

$$= \frac{5}{2} + \frac{5}{2}i + i$$

$$= \frac{5}{2} + \frac{7}{2}i$$

$\therefore \operatorname{Re} z = \frac{5}{2}$, $\operatorname{Im} z = \frac{7}{2}$

Ekvationslösning

Exempel 6: Vad är fel med följande lösning av den reella ekvationen $\sqrt{2x-1} = x-2$?

$$\sqrt{2x-1} = x-2$$

$$\left(\sqrt{2x-1}\right)^2 = (x-2)^2$$

$$2x-1 = x^2-4x+4$$

$$0 = x^2-6x+5$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2-4\cdot1\cdot5}}{2\cdot1}$$

$$x = \frac{6 \pm 4}{2}$$

Svar: $x = 5$ eller $x = 1$

- Beteckningarna är bristfälliga. Vad är sambandet mellan likheterna?

- Svaret $x = 5$ eller $x = 1$ är fel! För $x = 1$ gäller

$$\sqrt{2x-1} = \sqrt{2-1} = 1 \neq -1 = x-2$$

Vi löser ekvationen på ett korrekt sätt:

$$\sqrt{2x-1} = x-2$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{2x-1}\right)^2 = (x-2)^2$$

$$\Rightarrow 2x-1 = x^2-4x+4$$

$$\Rightarrow 0 = x^2-6x+5$$

$$\Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{6 \pm 4}{2}$$

$$\Rightarrow x=5 \text{ eller } x=1.$$

- Vi har visat att <u>om</u> det finns ett tal x så att $\sqrt{2x-1} = x-2$ så är $x=5$ eller $x=1$.

(Mängdteoretiskt, alltså, $\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{2x-1} = x-2\} \subset \{1,5\}$)

- Vi måste därefter granska skilt för sig om talen 1 och 5 satisfierar ekvationen:

<u>$x=1$</u>: $\sqrt{2x-1} = \sqrt{2-1} = 1 \neq -1 = x-2$

<u>$x=5$</u>: $\sqrt{2x-1} = \sqrt{10-1} = 3 = x-2$

Alltså är $x=5$ den <u>enda</u> lösningen till ekvationen.

Exempel 7: Lös den komplexa ekvationen

$$|z| = iz.$$

Lösning: $z=0$ är en lösning, eftersom

$$|0| = \sqrt{0^2+0^2} = 0 = i\cdot 0.$$

Anta, att $z \neq 0$ och att $|z| = iz$. Vi får följande implikationskedja:

$$|z| = iz \qquad \Big|\ ^2$$

$$\Rightarrow |z|^2 = (iz)^2$$

$$\Rightarrow z\bar{z} = -z^2 \qquad \Big|\cdot\frac{1}{z} \quad (z\neq 0)$$

$$\Rightarrow \bar{z} = -z \qquad \Big| +z$$

$$\Rightarrow z+\bar{z} = 0 \qquad \Big|\ z=a+bi \text{ för något } a,b\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow a+bi+a-bi = 0$$

$$\Rightarrow 2a = 0$$

$$\Rightarrow a = 0$$

- Alltså <u>om</u> $z\neq 0$ är en lösning till ekvationen, så gäller $z = bi$ för något $b\in\mathbb{R}$.

- För $z = bi$, där $b\in\mathbb{R}$, gäller

$$|z| = |bi| = \sqrt{b^2} = |b| = \begin{cases} b, & \text{då } b\geq 0 \\ -b, & \text{då } b\leq 0 \end{cases}$$

och $iz = i\cdot(bi) = i^2\cdot b = -b$

Alltså, $|z| = iz$ om och endast om $z = bi$, där $b\leq 0$.

Exempel: Lös den komplexa ekvationen

$$3z - 4i = 1 + 2iz$$

Lösning: $3z - 4i = 1 + 2iz$

$$\Rightarrow 3z - 2iz = 1 + 4i$$

$$\Rightarrow (3-2i)z = 1 + 4i$$

$$\Rightarrow z = \frac{1+4i}{3-2i}$$

Alltså om ekvationen har en lösning z så är

$$z = \frac{1+4i}{3-2i}$$

Vi visar, att $z = \frac{1+4i}{3-2i}$ faktiskt är en lösning:

$$z = \frac{1+4i}{3-2i}$$

$$\Rightarrow (3-2i)z = 1 + 4i$$

$$\Rightarrow 3z - 2iz = 1 + 4i$$

$$\Rightarrow 3z - 4i = 1 + 2iz.$$

Alltså $z = \frac{1+4i}{3-2i}$ satisfierar ekvationen.

$\therefore$ Ekvationen har exakt en lösning, och den är

$$z = \frac{1+4i}{3-2i} = \frac{(1+4i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{3+2i+12i-8}{13} = \frac{-5+14i}{13}$$

$$= \frac{-5}{13} + \frac{14}{13}i.$$

Sats 8: För $z, w \in \mathbb{C}$ gäller

$$|zw| = |z| \cdot |w|$$

Bevis:

$$|zw| = \sqrt{(zw)(\overline{zw})}$$

$$= \sqrt{(zw)(\bar{z}\bar{w})}$$

$\boxed{\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}, \text{ övn. uppg.}}$

$$= \sqrt{z\bar{z} \cdot w\bar{w}}$$

$$= \sqrt{z\bar{z}}\sqrt{w\bar{w}}$$

$\boxed{z\bar{z} \geq 0, \; w\bar{w} \geq 0}$

$$= |z| \cdot |w| \quad \square$$

Sats 9: För $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ gäller

$$|z^{-1}| = 1/|z|$$

Bevis: Eftersom $|z^{-1}| \cdot |z| \underset{\text{Sats 8}}{=} |z^{-1}z| = |1| = 1$

så gäller

$$|z^{-1}| = 1/|z| \quad \square$$

Följdsats 10: För $z, w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$ gäller

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$$

Bevis: $\left|\frac{z}{w}\right| = |zw^{-1}| \underset{\text{Sats 8}}{=} |z||w^{-1}| \underset{\text{Sats 9}}{=} |z| \cdot \frac{1}{|w|} = \frac{|z|}{|w|} \quad \square$

Exempel 11: Bestäm modulen $|z|$ då

(a) $z = (3+4i)\cdot(1-5i)$

(b) $z = \dfrac{1+i}{3-i}$

(c) $z = (1+i)^8 \cdot (3-2i)^{-2}$

(a) $|z| = |(3+4i)\cdot(1-5i)|$

$= |3+4i|\cdot|1-5i|$

$= \sqrt{3^2+4^2}\cdot\sqrt{1^2+5^2}$

$= 5\sqrt{26}$

(b) $|z| = \left|\dfrac{1+i}{3-i}\right| = \dfrac{|1+i|}{|3-i|} = \dfrac{\sqrt{1^2+1^2}}{\sqrt{3^2+1^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

(c) $|z| = |(1+i)^8(3-2i)^{-2}| = \left|\dfrac{(1+i)^8}{(3-2i)^2}\right|$

$= \dfrac{|(1+i)^8|}{|(3-2i)^2|} = \dfrac{|1+i|^8}{|3-2i|^2} = \dfrac{\left(\sqrt{1^2+1^2}\right)^8}{\left(\sqrt{3^2+2^2}\right)^2}$

$= \dfrac{2^4}{13} = \dfrac{16}{13}$

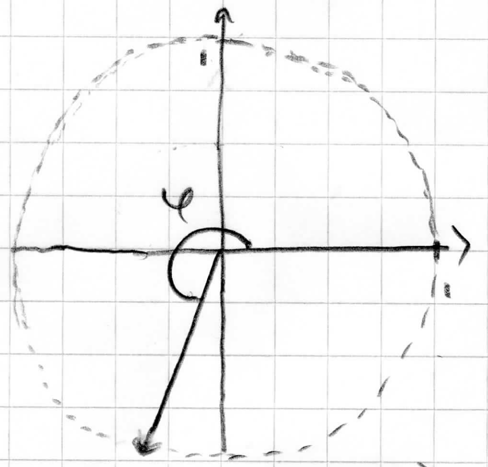
Fre 4.10

Komplexa tal i polär form

Varje vektor $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ på enhetscirkeln

$$S^1 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \}$$

kan skrivas som $(\cos \varphi, \sin \varphi)$ där φ är vinkeln mellan positiva x-axeln och (x,y).



$(x,y) = (\cos \varphi, \sin \varphi)$

Obs! Vi använder alltid vinkelenheten radian

Konvertering:

$$\text{radianer} = \text{grader} \cdot \frac{\pi}{180}$$

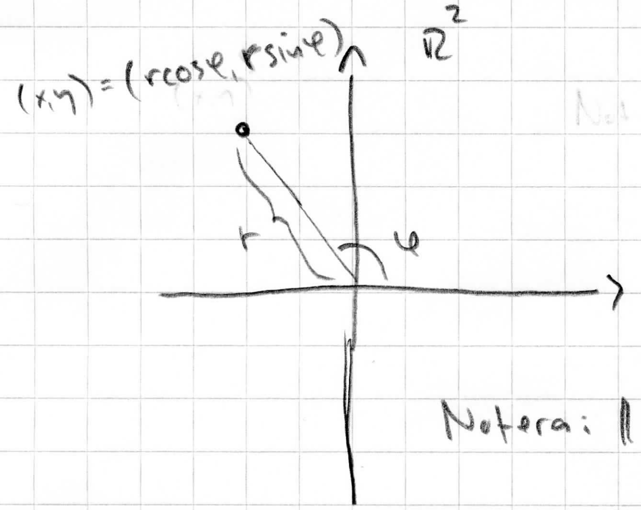
$$\text{grader} = \text{radianer} \cdot \frac{180}{\pi}$$

Ex.

Grader	radianer
0	0
45	$\pi/4$
90	$\pi/2$
180	π
360	2π

Generellt: Låt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Beteckna $r = \sqrt{x^2+y^2}$, d.v.s. r är avståndet mellan (x,y) och origo.
Låt φ vara vinkeln mellan positiva x-axeln och (x,y). Då är

$$(x,y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$



Notera: $\|(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\|$

$$= \sqrt{(r\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi)^2}$$
$$= \sqrt{r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}$$
$$= r\sqrt{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}$$
$$= r.$$

Ett komplext tal $z=(x,y)$ kan alltså skrivas som

$z = (|z|\cos\varphi, |z|\sin\varphi)$. Då z skrivs i

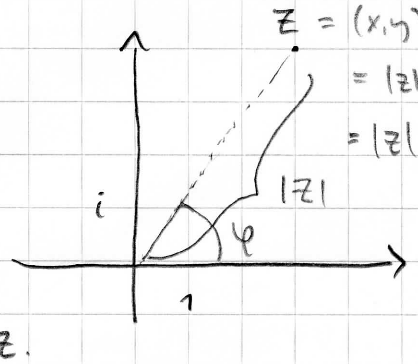
formen $z = x+iy$, $x,y\in\mathbb{R}$ får vi alltså formeln

$$z = |z|\cos\varphi + i|z|\sin\varphi$$

D.v.s. $\boxed{z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$. Denna form kallas

den <u>polära formen</u> för z.

$z = (x,y) = (|z|\cos\varphi, |z|\sin\varphi)$
$= |z|\cos\varphi + i|z|\sin\varphi$
$= |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$



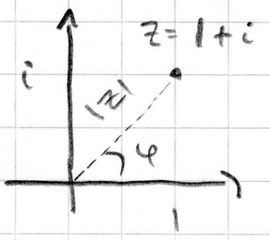
- φ kallas för <u>argumentet</u> till z.

Exempel 12: Skriv följande komplexa tal i polär form:

(a) $z = 1+i$, (b) $z = 3$, (c) $z = -2i$

(d) $z = 1 - i\sqrt{3}$

(a)



$$|z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{1}{1}\right)$$

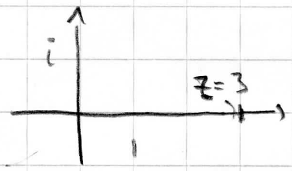
$$\left(= \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

$$= \pi/4$$

(d.v.s. $45°$)

Alltså $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

(b)

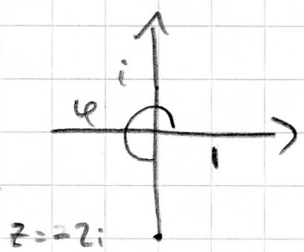


$$|z| = \sqrt{3^2+0^2} = 3$$

$$\varphi = 0$$

Alltså $z = 3(\cos 0 + i\sin 0)$

(c)

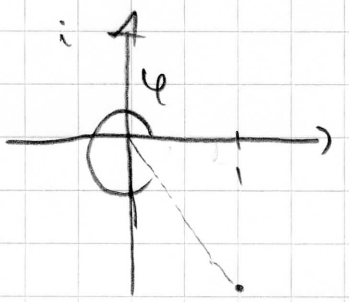


$$|z| = \sqrt{0^2+(-2)^2} = 2$$

$$\varphi = \frac{3}{2}\pi$$

Alltså $z = 2\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi\right)$

(d)



$$|z| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$$

$$\varphi = 2\pi - \arctan \frac{\sqrt{3}}{1} = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5}{3}\pi$$

Alltså $z = 2\left(\cos \frac{5}{3}\pi + i \sin \frac{5}{3}\pi\right)$

<u>Sats 13</u>: Vi antar, att $z, w \in \mathbb{C}$ har polära formerna

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \text{ och } w = |w|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Då gäller: (a) $zw = |z||w|(\cos(\varphi+\theta) + i\sin(\varphi+\theta))$

(b) $\overline{z} = |z|(\cos\varphi - i\sin\varphi)$

(c) $z^{-1} = |z|^{-1}(\cos\varphi - i\sin\varphi)$, $z \neq 0$

(d) <u>De Moivres formel</u>: om $n \in \mathbb{Z}$ så gäller

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

<u>Bevis</u>: (a) $zw = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \cdot |w|(\cos\theta + i\sin\theta)$

$= |z||w|(\cos\varphi\cos\theta + i\cos\varphi\sin\theta + i\sin\varphi\cos\theta +$
$+ i^2\sin\varphi\sin\theta)$

$= |z||w|\big(\cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta + i(\cos\varphi\sin\theta + \sin\varphi\cos\theta)\big)$

$= |z||w|(\cos(\varphi+\theta) + i\sin(\varphi+\theta))$

(b) $\bar{z} = \overline{|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$

$= \overline{|z|} \cdot \overline{(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$ $\quad \left(\overline{u \cdot v} = \bar{u} \cdot \bar{v}\right)$

$= |z|(\cos\varphi - i\sin\varphi)$

(c) $z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2} = \dfrac{|z|(\cos\varphi - i\sin\varphi)}{|z|^2} = |z|^{-1}(\cos\varphi - i\sin\varphi)$, $z \neq 0$

(d) Vi visar först, med induktion, att formeln gäller för alla $n \in \mathbb{N}$:

Bassteg: $n=0$: $z^0 = 1 = \cos 0 + i\underbrace{\sin 0}_{=0} = |z|^0(\cos 0 \cdot \varphi + i\sin 0 \cdot \varphi)$

Induktionssteg: Anta, att $z^k = |z|^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi)$ för något $k \in \mathbb{N}$.

Då gäller $z^{k+1} = z \cdot z^k \overset{\text{i.a.}}{=} |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \cdot |z|^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi)$

$= |z|^{k+1}(\cos\varphi\cos k\varphi + i\cos\varphi\sin k\varphi + i\sin\varphi\cos k\varphi + i^2\sin\varphi\sin k\varphi)$

$= |z|^{k+1}(\cos\varphi\cos k\varphi - \sin\varphi\sin k\varphi + i(\cos\varphi\sin k\varphi + \cos k\varphi\sin\varphi))$

$= |z|^{k+1}(\cos(\varphi + k\varphi) + i\sin(\varphi + k\varphi))$

$= |z|^{k+1}(\cos(k+1)\varphi + i\sin(k+1)\varphi)$

På basis av ind. princ. så gäller formeln för alla $n \in \mathbb{N}$.

Låt nu, $n \in \mathbb{Z}$, $n<0$. Beteckna $m = -n$. Då är

$z^n = z^{m\cdot(-1)} = (z^m)^{-1} = \left(|z|^m(\cos m\varphi + i\sin m\varphi)\right)^{-1}$

$\overset{(c)}{=} (|z|^m)^{-1}(\cos m\varphi - i\sin m\varphi)$

$$= |z|^n\left(\cos(-n\varphi) - i\sin(-n\varphi)\right)$$

$$= |z|^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right).$$

Obs: i (a) och (d) använde vi formlerna

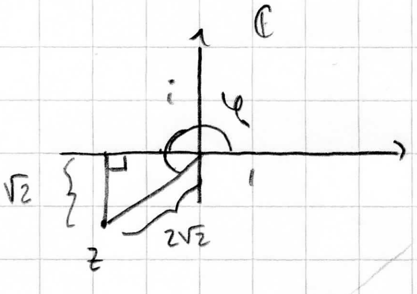
$$\begin{cases} \sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a \\ \cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b \end{cases}$$

Exempel 14: Låt $z = -\sqrt{6} - i\sqrt{2}$. Bestäm z^{10} med hjälp av de Moivres formel.

Modulen: $|z| = \sqrt{(-\sqrt{6})^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Argumentet: $\varphi = \pi + \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right) = \pi + \arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$

$$= \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$$



Alltså z i polär form:

$$z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$$

De Moivre: $z^{10} = (2\sqrt{2})^{10}\left(\cos\left(10\cdot\frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(10\cdot\frac{7\pi}{6}\right)\right)$

$$= 2^{10}\cdot 2^5\left(\cos\left(10\pi + \frac{10\pi}{6}\right) + i\sin\left(10\pi + \frac{10\pi}{6}\right)\right)$$

$$= 2^{15}\left(\cos\frac{10\pi}{6} + i\sin\frac{10\pi}{6}\right)$$ (cos och sin 2π-periodiska)

$$= 2^{15}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$$

$$= 2^{15}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

fre 1.11.

$$= 2^{14} - i\cdot 2^{14}\cdot\sqrt{3}$$

Låt $\varphi \in \mathbb{R}$. Vi betecknar det komplexa talet

$\cos\varphi + i\sin\varphi$ med $e^{i\varphi}$.

[Obs! I kursen komplexanalys utvidgas exponentfunktionen $x \mapsto e^x$ på ett naturligt sätt till en funktion $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto e^z$. För denna funktion gäller

$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ för alla $\varphi \in \mathbb{R}$. (Eulers formel)]

Det komplexa talet $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ kan alltså skrivas som $\boxed{z = |z|e^{i\varphi}}$, $\boxed{\text{exponentiell form av } z.}$

Från sats 13 följer att för $z = |z|e^{i\varphi}$ och $w = |w|e^{i\theta}$

gäller
- $zw = |z||w|e^{i(\varphi+\theta)}$
- $\bar{z} = |z|(\cos\varphi - i\sin\varphi) = |z|(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)) = |z|e^{-i\varphi}$
- $z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2} = \dfrac{|z|}{|z|^2}e^{-i\varphi} = |z|^{-1}e^{-i\varphi}$
- $z^n = |z|^n e^{in\varphi}$

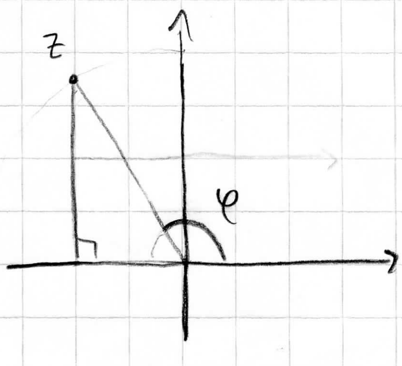
Exempel 15: Skriv följande komplexa tal i exponentiell form:

(a) $z = -2 + 2\sqrt{3}i$ (b) $w = -3 - 3i$ (c) $z^3 w^4$

(a) $|z| = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$

$\varphi = \pi - \arccos\frac{2}{4} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$

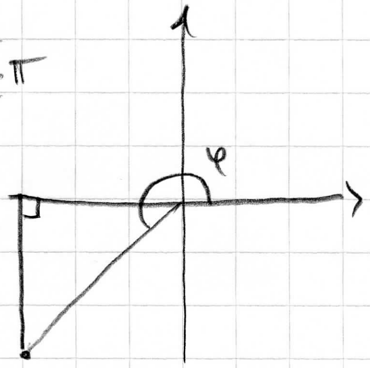
Alltså $z = 4e^{\frac{2}{3}\pi i}$



(b) $|w| = \sqrt{(-3)^2+(-3)^2} = 3\sqrt{2}$

$\varphi = \pi + \arccos \frac{3}{3\sqrt{2}} = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{4}\pi$

Alltså $z = 3\sqrt{2}\, e^{\frac{5}{4}\pi i}$



(c) $z^3 w^4 = \left(4e^{\frac{2}{3}\pi i}\right)^3 \cdot \left(3\sqrt{2}\, e^{\frac{5}{4}\pi i}\right)^4$ z

$= 4^3 e^{3\cdot\frac{2}{3}\pi i} \cdot (3\sqrt{2})^4 e^{4\cdot\frac{5}{4}\pi i}$

$= 64 e^{2\pi i} \cdot 324 e^{5\pi i}$

$= 20736\, e^{i(2\pi + 5\pi)}$

$= 20736\, e^{i7\pi}$

$= 20736\, e^{i(\pi + 6\pi)}$

$\overset{(*)}{=} 20736\, e^{i\pi}$

(*) $e^{i(\varphi + 2n\pi)} = e^{i\varphi}$ för alla $\varphi \in \mathbb{R}$ och $n \in \mathbb{Z}$

orsak: $e^{i(\varphi+2n\pi)} = \cos(\varphi + 2n\pi) + i\sin(\varphi + 2n\pi)$

$= \cos\varphi + i\sin\varphi$

$= e^{i\varphi}.$

Sats 16: Låt $z, w \in \mathbb{C}$. Om $zw = 0$ så är antingen $z = 0$ eller $w = 0$.

($\mathbb{C}$ är alltså ett integritetsområde (Algebra I))

Bevis: Anta, att $zw = 0$. Låt φ resp. θ beteckna argumentet för z resp. w. Då är alltså $z = |z|e^{i\varphi}$, $w = |w|e^{i\theta}$ och därmed

$zw = |z||w|e^{i(\varphi+\theta)}$. Eftersom $zw = 0$ så är $|zw| = 0$ och därmed $|z|\cdot|w| = 0$ ($|zw| = |z||w|$).
Därmed är $|z| = 0$ eller $|w| = 0$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$)

fre 8.11

d.v.s. $z = 0$ eller $w = 0$. $\square$

Exempel 15: Bestäm modulen, argumentet, realdelen samt imaginärdelen av följande komplexa tal

(a) $z_1 = 3e^{-\frac{\pi}{2}i} \cdot 7e^{\frac{\pi}{4}i}$

(b) $z_2 = -2e^{-\frac{\pi}{6}i}$

(c) $z_3 = \dfrac{-12e^{\frac{4}{3}\pi i}}{4e^{\pi/6\, i}}$

(a) $z_1 = 21e^{(-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4})i} = 21e^{-\frac{\pi}{4}i} = 21e^{(2\pi-\frac{\pi}{4})i}$

$= 21e^{\frac{7}{4}\pi i}$

(kom ihåg: $e^{i(\varphi+2n\pi)} = e^{i\varphi}$ för alla $\varphi \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$)

Alltså $|z_1| = 21$, argumentet $\varphi = \frac{7}{4}\pi$

$$z_1 = 21e^{\frac{7}{4}\pi i} = 21\left(\cos\tfrac{7}{4}\pi + i\sin\tfrac{7}{4}\pi\right)$$
$$= 21\left(\sqrt{2}/2 - i\sqrt{2}/2\right)$$
$$= \frac{21\sqrt{2}}{2} - \frac{21\sqrt{2}}{2}i$$

Alltså $\operatorname{Re} z_1 = \frac{21\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{Im} z = -\frac{21\sqrt{2}}{2}$

(b) $z_2 = -2e^{-\frac{\pi}{6}i} = (-1)\cdot 2e^{-\frac{\pi}{6}i}$

$= e^{i\pi}\cdot 2e^{-\frac{\pi}{6}i}$ $\quad (e^{i\pi} = -1)$

$= 2e^{i(\pi - \frac{\pi}{6})}$

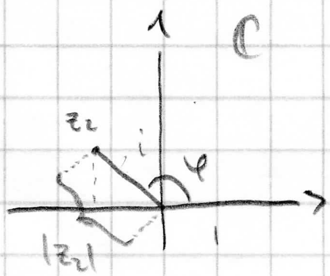
$= 2e^{\frac{5\pi}{6}i}$

Alltså $|z_2| = 2$, argumentet $\varphi = \frac{5\pi}{6}$

$z_2 = 2e^{\frac{5\pi}{6}i} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

$= 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$

$= -\sqrt{3} + i$



Alltså $\operatorname{Re} z_2 = -\sqrt{3}$, $\operatorname{Im} z_2 = 1$

(c) $z_3 = \frac{-12e^{\frac{4}{3}\pi i}}{4e^{\frac{\pi}{6}i}} = -3e^{\frac{4}{3}\pi i}\cdot e^{-\frac{\pi}{6}i}$ $\quad \left(\text{Komihåg: } \frac{1}{e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi}\right)$

$= -3e^{i(\frac{4}{3}\pi - \frac{\pi}{6})}$

$= (-1)\cdot 3e^{\frac{7}{6}\pi i}$

$= e^{i\pi}\cdot 3e^{\frac{7}{6}\pi i}$

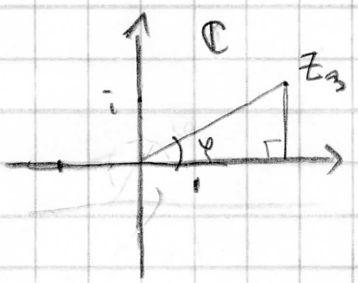
$= 3e^{i(\pi + \frac{7\pi}{6})}$

$= 3e^{i(2\pi + \frac{1}{6}\pi)} = 3e^{\frac{\pi}{6}i}$

Alltså $|z_3| = 3$, argumentet $\varphi = \frac{\pi}{6}$

$$z_3 = 3e^{\frac{\pi}{6}i} = 3\left(\cos \pi/6 + i\sin \pi/6\right)$$
$$= 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$
$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

Alltså: $\operatorname{Re} z_3 = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{Im} z_3 = \dfrac{3}{2}$



<u>Obs</u> $z = r(\cos\varphi + i\sin\phi)$, där $r\in\mathbb{R}$, $\varphi, \phi \in [0, 2\pi)$

i polär form om och endast om $r \geq 0$ och $\varphi = \phi$. Då är $|z| = r$ och argumentet till z är $\varphi = \phi$

<u>Exempel 16</u>: Skriv z i polär form då:

(a) $z = -3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

(b) $z = -2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

(a) $$z = -3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 3\left(-\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$= 3\left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right)$$
$$= 3\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\left(\frac{\pi}{3} - \pi\right)\right)$$
$$= 3\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\left(\frac{\pi}{3} - \pi + 2\pi\right)\right) = \underline{\underline{3\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)}}$$

(b) $z = -2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

$= 2\left(-\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

$= 2\left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

$= 2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\left(2\pi - \frac{3\pi}{4}\right)\right)$

$= 2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

Fre 15.11

Komplexa andra grads ekvationer:

Låt $a \in \mathbb{R}$. Vi löser den komplexa ekvationen

$$z^2 = a.$$

- Om $a \geq 0$: $z^2 = a \Leftrightarrow z^2 - a = 0$

$\Leftrightarrow z^2 - (\sqrt{a})^2 = 0$

$\Leftrightarrow (z + \sqrt{a})(z - \sqrt{a}) = 0$

Sats $\Leftrightarrow z + \sqrt{a} = 0$ eller $z - \sqrt{a} = 0$

$\Leftrightarrow z = -\sqrt{a}$ eller $z = \sqrt{a}$.

- Om $a < 0$: $z^2 = a \Leftrightarrow z^2 - a = 0$

$\Leftrightarrow z^2 - (i^2(-a)) = 0$

$\Leftrightarrow z^2 - (i^2(\sqrt{-a})^2) = 0$

$\Leftrightarrow z^2 - (i\sqrt{-a})^2 = 0$

$\Leftrightarrow (z + i\sqrt{-a})(z - i\sqrt{-a}) = 0$

$\Leftrightarrow z + i\sqrt{-a}) = 0$ eller $z - i\sqrt{-a} = 0$

$\Leftrightarrow z = -i\sqrt{-a}$ eller $z = i\sqrt{-a}$.

Alltså $z^2 = a$ har lösningen

$$(*) \quad \boxed{\begin{aligned} z &= \pm\sqrt{a} \quad \text{om } a \geq 0 \\ z &= \pm i\sqrt{-a} \quad \text{om } a < 0 \end{aligned}}$$

Sats 17: Låt $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Då har den komplexa ekvationen

$$az^2 + bz + c = 0$$

lösningen $z = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, om $b^2 - 4ac \geq 0$

$$z = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}, \text{ om } b^2 - 4ac < 0.$$

Bevis: $b^2 - 4ac \geq 0$:

$$az^2 + bz + c = 0 \iff 4a^2z^2 + 4abz + 4ac = 0$$

$$\iff (2az + b)^2 = b^2 - 4ac$$

$$\overset{(*)}{\iff} 2az + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$\iff z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$b^2 - 4ac < 0$:

$$az^2 + bz + c = 0 \iff 4a^2z^2 + 4abz + 4ac = 0$$

$$\iff (2az + b)^2 = b^2 - 4ac$$

$$\overset{(*)}{\iff} 2az + b = \pm i\sqrt{-(b^2 - 4ac)}$$

$$\iff z = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

<u>Exempel 18:</u> Lös komplexa ekvationerna

(a) $z^2 - 2z + 1 = 0$

(b) $z^2 - 2z + 1 = -10z - 24$

(a) Diskriminanten: $(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4 - 4 = 0$

Alltså, enligt sats 17, är lösningen

$$z = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 0}{2} = 1$$

<u>Svar:</u> $z = 1$

(b) $z^2 - 2z + 1 = -10z - 24$

$$\Leftrightarrow \quad z^2 + 8z + 25 = 0$$

$(8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = -36 < 0)$

$$\Leftrightarrow \quad z = \frac{-8 \pm i\sqrt{4 \cdot 1 \cdot 25 - 8^2}}{2 \cdot 1}$$

$$\Leftrightarrow \quad z = \frac{-8 \pm i\sqrt{36}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad z = -4 \pm i \cdot 3$$

<u>Svar:</u> $z = -4 + 3i$ eller $z = -4 - 3i$

En komplex ekvation av formen

$$z^n = a \quad , \text{där } a \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

kallas för en <u>binomekvation</u>

Sådana ekvationer löses behändligt med den exponentiella framställningen. Vi illustrerar med exempel:

<u>Exempel 19:</u> Lös de komplexa ekvationerna

(a) $z^5 = 1$ (b) $z^4 = 2\sqrt{3} - 2i$

(a) Vi skriver z i exponentframställningen:

$$z = re^{i\varphi} \quad , \text{där } r = |z| \geq 0 \text{ och } \varphi \in [0, 2\pi)$$

De Moivre: $z^5 = r^5 e^{i5\varphi}$.

Alltså $z^5 = 1 \iff r^5 e^{i5\varphi} = 1$

$\iff r^5 e^{i5\varphi} = e^{i \cdot 0}$

$\iff r^5 = 1$ och $5\varphi = 0 + 2\pi n$ för något $n \in \mathbb{Z}$

[eftersom $re^{i\varphi} = se^{i\theta}$, där $r, s \geq 0$

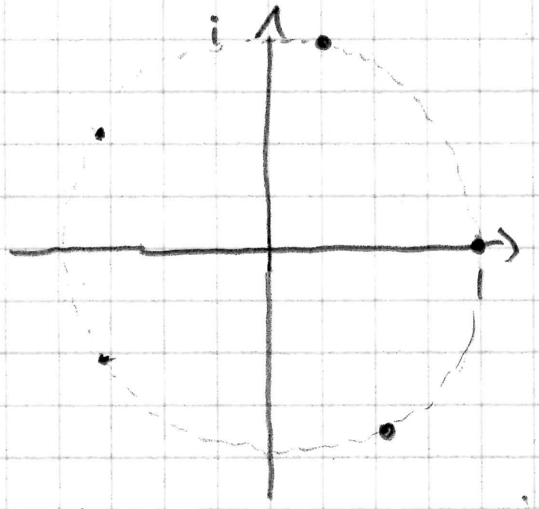
$\iff r = s$ och $\varphi = \theta + 2\pi n$ för något $n \in \mathbb{Z}$]

$\iff r = 1$ och $\varphi = \frac{2}{5}\pi n$ för något $n \in \mathbb{Z}$

$\overset{\varphi \in [0,2\pi)}{\iff} r = 1$ och $\varphi \in \{0, \frac{2}{5}\pi, \frac{4}{5}\pi, \frac{6}{5}\pi, \frac{8}{5}\pi\}$

fre 22.11

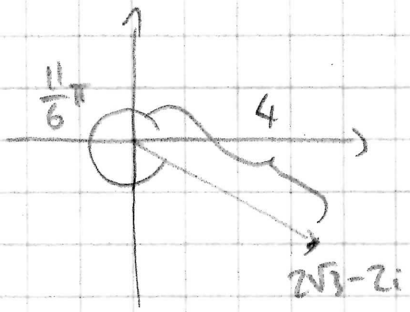
<u>Svar:</u> Lösningarna är $e^{i0} = 1$, $e^{\frac{2}{5}\pi i}$, $e^{\frac{4}{5}\pi i}$, $e^{\frac{6}{5}\pi i}$, $e^{\frac{8}{5}\pi i}$.



(b) Låt igen $z = re^{i\varphi}$ där $r = |z| \geq 0$ och $\varphi \in [0, 2\pi)$

De Moivre: $z^4 = r^4 e^{i4\varphi}$.

Högra sidan: $2\sqrt{3} - 2i = 4e^{\frac{11}{6}\pi i}$



Alltså $z^4 = 2\sqrt{3} - 2i \iff r^4 e^{i4\varphi} = 4e^{\frac{11}{6}\pi i}$

$\iff r^4 = 4$ och $4\varphi = \frac{11}{6}\pi + 2\pi n$ för något $n \in \mathbb{Z}$

$\overset{(r \geq 0)}{\iff} r = \sqrt[4]{4}$ och $\varphi = \frac{11}{24}\pi + \frac{\pi}{2}n$ för något $n \in \mathbb{Z}$

$\overset{\varphi \in [0, 2\pi)}{\iff} r = \sqrt{2}$ och $\varphi \in \left\{\frac{11}{24}\pi, \frac{23}{24}\pi, \frac{35}{24}\pi, \frac{47}{24}\pi\right\}$

<u>**Svar**</u>: Lösningarna är $\sqrt{2}e^{\frac{11}{24}\pi i}$, $\sqrt{2}e^{\frac{23}{24}\pi i}$, $\sqrt{2}e^{\frac{35}{24}\pi i}$ och $\sqrt{2}e^{47/24\pi i}$.