Inledning till universitetsmatematik, hösten 2013

Mängdlära

<u>Definition</u>: En mängd är en kollektion av objekt som kallas mängdens element. I tillägg, för varje objekt bör man även kunna avgöra huruvida den tillhör mängden eller inte.

<u>Exempel 1</u>: • Mängden av alla naturliga tal
$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

• Mängden av alla heltal
$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

$\boxed{a \in A}$: a är ett element i mängden A, d.v.s. a <u>tillhör</u> A.

$\boxed{a \notin A}$: a tillhör <u>inte</u> A.

<u>Exempel 2</u>: $0 \in \mathbb{N}$, $-1 \notin \mathbb{N}$, $-1 \in \mathbb{Z}$, $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$

Olika sätt att definiera en mängd:

- Genom att räkna upp elementen: $\{0, 1, -2\}$
  $\{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}$
- Med hjälp av ett villkor: $\{z \in \mathbb{Z} : |z| \leq 1\}$
  $\{z \in \mathbb{Z} : z = 2m \text{ för något } m \in \mathbb{Z}\}$

- Genom vedertagna symboler:

$\emptyset$: tomma mängden (mängden utan element)

$\mathbb{Q} = \{ \frac{a}{b} : a,b \in \mathbb{Z} \, , \, b \neq 0 \}$: rationella talen

$\mathbb{R}$: reella talen

$\mathbb{C}$: komplexa talen

$]a,b[= \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \}$: öppet intervall

$[a,b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \}$: slutet intervall

$\vdots$

etc.

A är en <u>delmängd</u> till B, betecknas $A \subset B$, om för varje $x \in A$ gäller även $x \in B$.

$A \not\subset B$ betecknar att A inte är en delmängd till B.

<u>Exempel 3</u>:
- $\{1, \frac{1}{2}\} \subset \mathbb{Q}$
- $\{1, \frac{1}{2}, \sqrt{2}\} \not\subset \mathbb{Q}$ (orsak: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$)
- $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

<u>Obs</u>! För godtycklig mängd A gäller $\emptyset \subset A$ och $A \subset A$.

Exempel 4: Visa, att

(1) $\{0,1\} \subset \{x \in \mathbb{R} \mid x^5 + 3x^3 - 3x^2 - x = 0\}$

(2) $\{x \in \mathbb{R} \mid \cos x = x\} \subset \{x \in \mathbb{R} \mid (\cos x - x)^2 \cdot e^x = 0\}$

(3) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 4x + 3 = 0\} \not\subset \mathbb{N}$

---

(1) Vi betecknar $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^5 + 3x^3 - 3x^2 - x = 0\}$

Eftersom

$$0^5 + 3 \cdot 0^3 - 3 \cdot 0^2 - 0 = 0 + 0 - 0 - 0 = 0$$

och

$$1^5 + 3 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 1 = 1 + 3 - 3 - 1 = 0$$

Så gäller $0 \in A$ och $1 \in A$. Alltså $\{0,1\} \subset A$

(2) Anta, att $a \in \{x \in \mathbb{R} \mid \cos x = x\}$. Då gäller $\cos a = a$, d.v.s. $\cos a - a = 0$.

Således

$$(\cos a - a)^2 \cdot e^a = 0^2 \cdot e^a = 0 \quad \text{och}$$

därmed $a \in \{x \in \mathbb{R} \mid (\cos x - x)^2 \cdot e^x = 0\}$.

Alltså $\{x \in \mathbb{R} \mid \cos x = x\} \subset \{x \in \mathbb{R} \mid (\cos x - x)^2 \cdot e^x = 0\}$

(3) Notera, att mängden $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 4x + 3 = 0\}$ består av rötterna (lösningarna) till ekvationen $x^2 + 4x + 3 = 0$. Vi löser ekvationen:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} = -2 \pm 1$$

Rötterna är alltså $x=-3$ och $x=-1$. Således
$$\{x\in\mathbb{R} \mid x^2+4x+3=0\} = \{-1,-3\}$$

och $\{-1,-3\} \not\subset \mathbb{N}$ eftersom $-1 \notin \mathbb{N}$.

ons 5.9

Mängderna A och B är <u>identiska</u> om de har samma element.

Följande villkor är ekvivalenta:
(1) $A=B$
(2) $x\in A$ om och endast om $x\in B$
(3) $A\subset B$ och $B\subset A$

<u>Exempel 5</u>: Vilka av följande mängder är identiska?

$A=\{-1,0,1\}$, $B=\{-1,0,1,0,0,-1\}$, $C=\{n\in\mathbb{Z} \mid |n|<2\}$,
$D=\{x\in\mathbb{R} \mid x^3-x=0\}$.

Viser att $B=\{-1,0,1\}$ (upprepning av element påverkar inte mängden)
och $C=\{-1,0,1\}$.

Eftersom $(-1)^3-(-1)=-1+1=0$, $0^3-0=0$ och $1^3-1=0$
så gäller $-1\in D$, $0\in D$ och $1\in D$.
D.v.s $\{-1,0,1\}\subset D$.
Å andra sidan, så har en tredjegradsekvation högst 3 rötter. Alltså $\{-1,0,1\}=D$.

fre 7.9

<u>Svar</u>: $A=B=C=D$.

<u>Exempel 6</u>: Låt $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin 3x = x\}$,
$B = \{x \in \mathbb{R} \mid (\sin 3x - x)\cdot(x^2+1) = 0\}$

Visa, att $A = B$.

(Kom ihåg: villkoren (1) $A = B$
(2) $A \subset B$ och $B \subset A$
är ekvivalenta.)

$\boxed{A \subset B}$: Anta, att $a \in A$, d.v.s. $\sin 3a = a$.
Alltså $\sin 3a - a = 0$. Därmed
$(\sin 3a - a)\cdot(a^2+1) = 0$ vilket
betyder att $a \in B$. Alltså gäller $A \subset B$.

$\boxed{B \subset A}$: Anta, att $b \in B$, d.v.s. $(\sin 3b - b)\cdot(b^2+1) = 0$.

Kom ihåg: för $x, y \in \mathbb{R}$ gäller $xy = 0$ om och endast om $x = 0$ <u>eller</u> $y = 0$.

Eftersom $b \in \mathbb{R}$ så gäller $b^2 + 1 > 0$. Alltså måste
$\sin 3b - b = 0$, d.v.s.
$\sin 3b = b$ vilket betyder att $b \in A$.
Alltså gäller $B \subset A$.

$\therefore$ $A \subset B$ och $B \subset A$, d.v.s. $A = B$ $\square$

<u>Exempel 7</u>: Vi betraktar mängden

$$A = \{2, \mathbb{N}, \phi, \{\phi\}, \{2, \{2\}\}, \pi\}$$

Vilka påståenden är sanna? Vilka är falska?

(1) $\{2\} \in A$

(2) $\phi \subset A$

(3) $\{\phi, \{\phi\}\} \subset A$

(4) $\mathbb{N} \subset A$

(5) $\{2, 2\} \in A$

(6) $\{2, 2\} \subset A$

---

(1) är falskt. $\{2\}$ är inte ett element i A

(2) är (alltid) sant.

(3) är sant, eftersom $\phi \in A$ och $\{\phi\} \in A$

(4) är falskt. T.ex. $1 \in \mathbb{N}$ men $1 \notin A$.

(5) är falskt. $\{2,2\} = \{2\}$ är inte ett element i A.

(6) är sant, eftersom $\{2,2\} = \{2\}$ och $2 \in A$.

Operationer med mängder

Låt A och B vara mängder.

<u>unionen</u>: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ eller } x \in B\}$
uttalas "A union B".

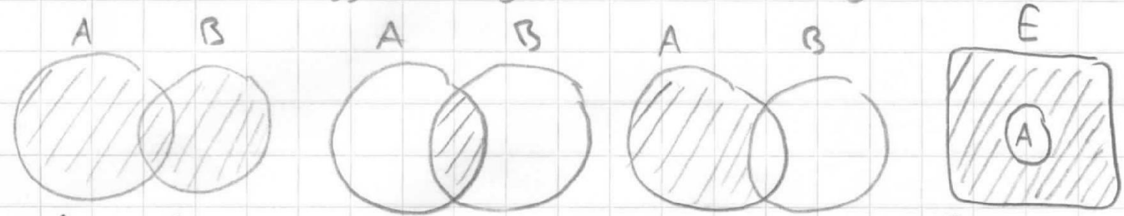
<u>snittet</u>: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ och } x \in B\}$
uttalas "A snitt B".

<u>differensen</u>: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ och } x \notin B\}$

Om $A \subset E$ så är <u>komplementet</u> till A i E mängden $E \setminus A$ och betecknas ofta med $\complement A$ eller A^c.

A och B är <u>disjunkta</u> om $A \cap B = \emptyset$.

Man kann åskådliggöra mängder med Venndiagram:



$A \cup B$ $\quad$ $A \cap B$ $\quad$ $A \setminus B$ $\quad$ $\complement A$

<u>Exempel 8</u>: Låt $A = \{0,1,2\}$, $B = \{2,3,4\}$, $C = \{3\}$

Bestäm $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \cap C$, $B \cup C$.

$A \cup B = \{0,1,2,3,4\}$

$A \cap B = \{2\}$

$A \setminus B = \{0,1\}$, $B \setminus A = \{3,4\}$

$A \cap C = \emptyset$ (A och C är alltså disjunkta)

$B \cup C = \{2,3,4\} = B$

Induktionsprincipen

De naturliga talen kan definieras med Peanos axiom:

(Giuseppe Peano 1858 - 1932)

De naturliga talen, $\mathbb{N}$, är en mängd med följande egenskaper:

P1: $0 \in \mathbb{N}$

P2: för varje $n \in \mathbb{N}$ existerar exakt ett naturligt tal $s(n) \in \mathbb{N}$, som kallas efterföljaren till n.

P3: 0 är inte efterföljare till något tal, d.v.s. $0 \neq s(n)$ för alla $n \in \mathbb{N}$.

P4: Två olika tal har aldrig samma efterföljare, d.v.s. $m \neq n \Rightarrow s(m) \neq s(n)$

P5: (induktionsaxiomet) Låt $A \subset \mathbb{N}$ med följande egenskaper:
- $0 \in A$
- $n \in A \Rightarrow s(n) \in A$.

Då gäller $A = \mathbb{N}$.

P5 ger 1. induktionsprincipen med vilken man kan behändigt bevisa påståenden av formen

"för varje $n \in \mathbb{N}$ gäller egenskapen P".

Bevisets steg:

<u>Bassteg</u>: man visar, att egenskap P gäller för talet 0.

<u>Induktionssteg</u>: • man gör <u>induktionsantagandet</u>:

egenskapen P gäller för något $k \in \mathbb{N}$.

• utgående från induktionsantagandet visar man att egenskap gäller för talet $k+1$

Exempel 9 : Visa med induktion, att

$$0+1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{för alla } n \in \mathbb{N}$$

Bevis: Bassteg: för $n=0$ är ekvationens vänstra sida 0 och högra sida $\frac{0 \cdot 1}{2} = 0$

Alltså gäller ekvationen för $n=0$.

Induktionssteg: Vi gör induktionsantagandet:

Vi antar at $0+1+2+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2}$ för något $k \in \mathbb{N}$.

Vi visar att då gäller $0+1+2+\dots+k+k+1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

$$\begin{aligned} 0+1+2+\dots+k+k+1 &\overset{\text{i.a.}}{=} \frac{k(k+1)}{2} + k+1 \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+2)(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

På basis av induktionsprincipen gäller således

$$0+1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{för alla } n \in \mathbb{N}.$$

Låt $n \in \mathbb{Z}$ och $m \in \mathbb{Z}$. Vi säger att n är delbart med m om det existerar $r \in \mathbb{Z}$ så att $n = mr$. I sådant fall säger vi att m delar n.

Beteckning: $m \mid n$.

Exempel 10: Visa med induktion att

$$11 \mid 5^{2n} - 3^n \quad \text{för alla } n \in \mathbb{N}.$$

Bevis: Bassteg: Eftersom $5^{2\cdot 0} - 3^0 = 1 - 1 = 0 = 11 \cdot 0$

så gäller $11 \mid 5^{2\cdot 0} - 3^0$.

Induktionssteg: induktionsantagande: Vi antar att

$$11 \mid 5^{2k} - 3^k \quad \text{för något } k \in \mathbb{N}.$$

Vi visar, att då gäller $11 \mid 5^{2(k+1)} - 3^{k+1}$.

Enligt induktionsantagandet existerar det ett tal $r \in \mathbb{Z}$ så att

$$5^{2k} - 3^k = 11r.$$

Därmed:
$$\begin{aligned}
5^{2(k+1)} - 3^{k+1} &= 5^{2k+2} - 3^{k+1} \\
&= 5^2 \cdot 5^{2k} - 3 \cdot 3^k \\
&= 25 \cdot 5^{2k} - 3 \cdot 3^k \\
&\overset{\text{i.a.}}{=} 25(11r + 3^k) - 3 \cdot 3^k \\
&= 25 \cdot 11r + 25 \cdot 3^k - 3 \cdot 3^k \\
&= 11 \cdot 25r + (25 - 3) \cdot 3^k \\
&= 11 \cdot 25r + 11 \cdot 2 \cdot 3^k \\
&= 11 \cdot (25r + 2 \cdot 3^k)
\end{aligned}$$

$$\boxed{5^{2k} - 3^k = 11r \Leftrightarrow 5^{2k} = 11r + 3^k}$$

Eftersom $25r + 2 \cdot 3^k \in \mathbb{Z}$ gäller därmed $11 \mid 5^{2(k+1)} - 3^{k+1}$

På basis av induktionsprincipen gäller således

$$11 \mid 5^{2n} - 3^n \quad \text{för alla } n \in \mathbb{N}.$$

Ons 11.9.

Variant av induktionsprincipen:

Låt $m \in \mathbb{N}$, $m > 0$. Om följande gäller:

- m har egenskap P
- alltid då $k \geq m$ och k har egenskap P, så har $k+1$ egenskap P,

så gäller enligt induktionsprincipen att n har egenskap P för alla $n \geq m$.

Exempel 11: Visa med induktion, att $3^n > n^3$ för alla $n \geq 4$.

Bevis: Basteg: $3^4 = 81 > 64 = 4^3$, alltså gäller olikheten för $n=4$.

Induktionssteg: Induktionsantagande:

Vi antar att $3^k > k^3$ för något naturligt tal $k \geq 4$.

Vi visar att då gäller $3^{k+1} > (k+1)^3$:

$$
\begin{aligned}
3^{k+1} = 3 \cdot 3^k &\overset{\text{i.a.}}{>} 3 \cdot k^3 \\
&= k^3 + k^3 + k^3 \\
&= k^3 + k \cdot k^2 + k^2 \cdot k \\
&> k^3 + 3k^2 + k^2 \cdot k \qquad (k \geq 4 \Rightarrow k \cdot k^2 > 3k^2) \\
&> k^3 + 3k^2 + 3k + 1 \qquad (k \geq 4 \Rightarrow k^2 \cdot k \geq 16k > 3k+1) \\
&= (k+1)^3
\end{aligned}
$$

På basis av induktionsprincipen gäller således

$$3^n > n^3 \quad \text{för alla } n \geq 4.$$

Notation: En summa $a_0 + a_1 + \dots + a_n$ av talen $a_0, a_1, \dots, a_n$ betecknas ofta med

$$\sum_{k=0}^{n} a_k$$

Exempel: $$\sum_{k=0}^{n} k = 0 + 1 + 2 + \dots + n$$

$$\sum_{j=2}^{5} 2^j = 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5$$

fre 13.9

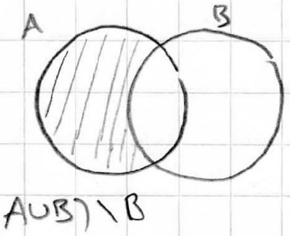
Vi går tillbaka till mängdläran och övar på att bevisa olika mängdteoretiska påståenden. Vi övar också på att hitta motexempel för att visa att ett påstående är falskt.

Exempel 12: Låt A och B vara mängder.

(a) Visa, att $(A \cup B) \setminus B \subset A$

(b) Stämmer det, att $(A \cup B) \setminus B = A$?

Venndiagram:



$(A \cup B) \setminus B$

(a) Anta, att $a \in (A \cup B) \setminus B$. Då gäller $a \in A \cup B$ och $a \notin B$. Eftersom $a \in A \cup B$ så gäller $a \in A$ eller $a \in B$. Men $a \notin B$, alltså måste $a \in A$.

Således gäller $(A \cup B) \setminus B \subset A$.

(b) Vi ger ett motexempel där likheten inte gäller:

Låt $A = \{1,2\}$, $B = \{2\}$.

Då är $(A \cup B) \setminus B = \{1,2\} \setminus \{2\}$
$= \{1\}$
$\neq A$

Alltså gäller inte $(A \cup B) \setminus B = A$ för godtyckliga mängder A och B.

[Det finns dock fall där likheten gäller, ex. $A = \{1\}$, $B = \{2\}$]

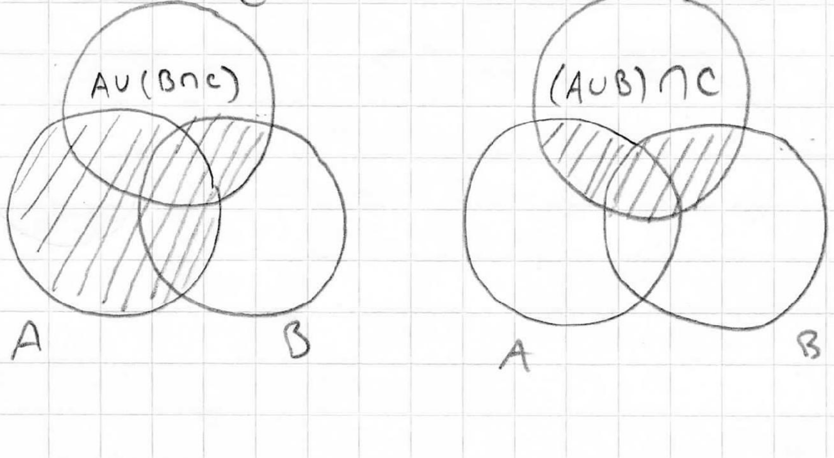
Exempel 13: Låt A, B och C vara mängder.

Visa, att en av följande likheter gäller alltid samt hitta på ett motexempel där den andra likheten inte gäller.

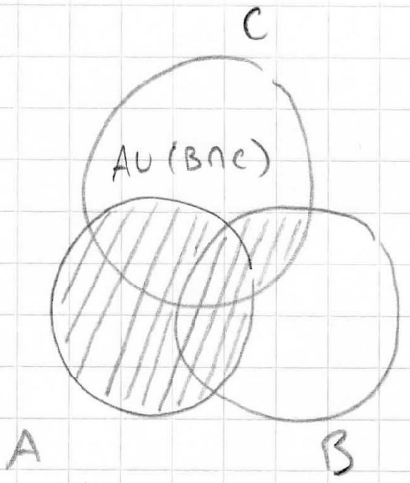
(i): $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$
(ii): $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

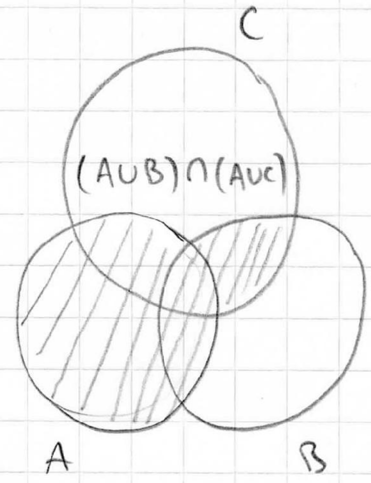
Venndiagram kan hjälpa oss att bestämma vilken likhet som gäller.

(i)



(ii)





Det ser ut som om likhet (i) inte gäller alltid, medan likhet (ii) gäller.

Vi visar, att $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Kom ihåg:
$A = B$ om och endast om
$A \subset B$ och $B \subset A$

"$\subset$": Anta, att $a \in A \cup (B \cap C)$.
Då gäller $a \in A$ eller $a \in B \cap C$.

- Om $a \in A$ så gäller $a \in A \cup B$ och $a \in A \cup C$. Därmed gäller $a \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- Om $a \in B \cap C$ så gäller $a \in B$ och $a \in C$. Därmed gäller $a \in A \cup B$ och $a \in A \cup C$. Alltså $a \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Således gäller $a \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Alltså $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$

"$\supset$": Anta, att $a \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Då gäller $a \in A \cup B$ och $a \in A \cup C$.

- Om $a \in A$ så gäller $a \in A \cup (B \cap C)$
- Om $a \notin A$ så måste $a \in B$ (eftersom $a \in A \cup B$) och $a \in C$ (eftersom $a \in A \cup C$). Alltså gäller $a \in B \cap C$ och därmed $a \in A \cup (B \cap C)$.

Således gäller $a \in A \cup (B \cap C)$.

Alltså $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$.

$\therefore$ Vi har därmed visat, att $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Vi ger ett motexempel där likheten

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ inte gäller:

Låt $A = B = \{1\}$ och $C = \emptyset$. Då gäller

$$A \cup (B \cap C) = A \cup \emptyset = A = \{1\} \neq \emptyset = (A \cup B) \cap \emptyset$$
$$= (A \cup B) \cap C$$

För godtycklig mängd A gäller
- $A \cup \emptyset = A$
- $A \cap \emptyset = \emptyset$

Exempel 14: Låt A och B vara mängder.

Visa, att om $A \subset B$ så gäller $A \cup B = B$.

Bevis: Anta, att $A \subset B$. Vi skall alltså visa, att då gäller $A \cup B = B$.

"$\subset$": Anta, att $a \in A \cup B$. Då gäller $a \in A$ eller $a \in B$. Om $a \in A$ så gäller $a \in B$ eftersom $A \subset B$.
Alltså gäller $a \in B$. Därmed $A \cup B \subset B$.

"$\supset$": Gäller alltid (om $a \in B$ så gäller $a \in A \cup B$)

Alltså gäller $A \cup B = B$.

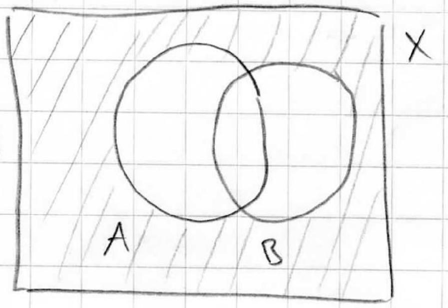
Kom ihåg: om $A \subset X$ så är komplementet till A i X mängden $\complement A = X \setminus A$.

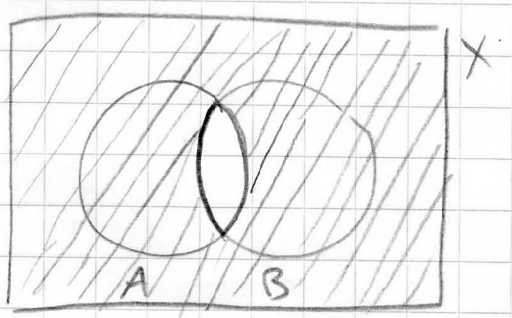
Sats 15 (De Morgans lagar)

Låt A, B och X vara mängder där $A \subset X$ och $B \subset X$. Då gäller

(i) $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$

(ii) $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$

(i) 

(ii) 

(i) "$\subset$": Anta, att $a \in \complement(A \cup B)$. Då gäller $a \in X$ och $a \notin A \cup B$. Eftersom $a \notin A \cup B$ så gäller $a \notin A$ och $a \notin B$. Således gäller $a \in X \setminus A$ och $a \in X \setminus B$, d.v.s. $a \in \complement A$ och $a \in \complement B$ vilket betyder att $a \in \complement A \cap \complement B$

Alltså $\complement(A \cup B) \subset \complement A \cap \complement B$.

"$\supset$": Anta, att $a \in \complement A \cap \complement B$. Då gäller $a \in \complement A$ och $\complement B$, d.v.s. $a \in X$ och $a \notin A$ och $a \notin B$. Därmed gäller $a \in X$ och $a \notin A \cup B$. Alltså $a \in X \setminus A \cup B$ d.v.s. $a \in \complement(A \cup B)$

Alltså $\complement A \cap \complement B \subset \complement(A \cup B)$.

$\therefore$ Således gäller $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$. $\square$

(ii) Vi noterar att $\complement\complement A = A$ för varje mängd $A \subset X$ (*)

Låt $C = \complement A$, $D = \complement B$. Då gäller

$$\complement(A \cap B) = \complement(\complement C \cap \complement D) \qquad (*)$$

$$\overset{(i)}{=} \complement(\complement(C \cup D))$$

$$= C \cup D$$

ons 18.9.

$$= \complement A \cup \complement B \qquad \square$$

(*) Lemma 16: Låt A och X vara mängder. Om $A \subset X$ så gäller följande likheter:

(i) $A \cup \complement A = X$

(ii) $A \cap \complement A = \emptyset$

(iii) $\complement\complement A = A$.

Bevis: Anta, att $A \subset X$. (i) "$\subset$": anta, att $x \in A \cup \complement A$.
Om $x \in A$ så gäller $x \in X$ $(A \subset X)$
Om $x \in \complement A$ så gäller $x \in X$.
Alltså $x \in X$.

"$\supset$": anta, att $x \in X$. Då gäller antingen $x \in A$ eller $x \notin A$.
Om $x \in A$ så gäller $x \in A \cup \complement A$
Om $x \notin A$ så gäller $x \in X \setminus A = \complement A$ och därmed $x \in A \cup \complement A$.

(ii) Anta, att $x \in A \cap \complement A$. Då gäller $x \in A$ och $x \in \complement A$. Därmed $x \in A$ och $x \notin A$, vilket är en motsägelse. Alltså innehåller $A \cap \complement A$ inga element och därmed är $A \cap \complement A = \emptyset$.

(iii) "$\subset$": Anta, att $x \in \complement\complement A$. Då gäller att $x \in X$ och $x \notin \complement A$. Därmed gäller $x \in A$ (eftersom $X = A \cup \complement A$).

"$\supset$": Anta, att $x \in A$. Därmed gäller $x \in X$. ($A \subset X$). Eftersom $A \cap \complement A = \emptyset$ så gäller $x \notin \complement A$. Alltså $x \in X \setminus \complement A = \complement\complement A$.

- I Lemma 16 (och exempel 14) har vi ett påstående av formen "om P så gäller Q". Ett sådant påstående bevisas på följande sätt:
  - Anta, att P gäller
  - Utgående från antagandet visar man att Q gäller.

- Påståenden av formen "P om och endast om Q" kan bevisas genom att bevisa skilt för sig påståendena

"om P så gäller Q" och "om Q så gäller P".

(på sättet som förklarades i föregående punkt)

<u>Exempel 17</u>: Anta, att $A \subset X$ och $B \subset X$. Visa, att

$$A \subset B \text{ om och endast om } \complement A \cup B = X.$$

<u>Bevis</u>: "$\Rightarrow$": Anta, att $A \subset B$. Vi visar att $\complement A \cup B = X$.

"$\subset$": Anta, att $x \in \complement A \cup B$. Då gäller $x \in \complement A$ eller $x \in B$.

Om $x \in \complement A$, d.v.s. $x \in X$ och $x \notin A$ så gäller $x \in X$.

Om $x \in B$ så gäller $x \in X$ eftersom $B \subset X$.

$\therefore$ Alltså gäller $x \in X$.

"$\supset$": Anta, att $x \in X$. Då gäller $x \in A$ eller $x \in \complement A$ (kom ihåg $X = A \cup \complement A$).

Om $x \in A$ så gäller $x \in B$, eftersom vi antog $A \subset B$, och därmed $x \in \complement A \cup B$.

Om $x \in \complement A$ så gäller $x \in \complement A \cup B$.

$\therefore$ Alltså gäller $x \in \complement A \cup B$.

"$\Leftarrow$": Anta, att $\complement A \cup B = X$. Vi visar, att $A \subset B$:

Anta, att $x \in A$. Eftersom $A \subset X$ så gäller $x \in X$ och därmed $x \in \complement A \cup B$, d.v.s. $x \in \complement A$ eller $x \in B$.

Om $x \in \complement A$ så gäller $x \in A \cap \complement A$ vilket är en motsägelse eftersom $A \cap \complement A = \emptyset$.

Alltså gäller $x \in B$.

<u>Exempel 18:</u> Låt A och B vara mängder. Visa, att

$$A \not\subset B \text{ om och endast om } A \setminus B \neq \emptyset .$$

<u>Bevis:</u> "$\Rightarrow$" Anta, att $A \not\subset B$. Då existerar ett element $x \in A$ som inte tillhör B, d.v.s. $x \in A$ och $x \notin B$. Alltså $x \in A \setminus B$ och därmed gäller $A \setminus B \neq \emptyset$.

"$\Leftarrow$" Anta, att $A \setminus B \neq \emptyset$. Då existerar ett element $x \in A \setminus B$, d.v.s $x \in A$ och $x \notin B$. Alltså gäller $A \not\subset B$.

Vissa påståenden måste bevisas med ett motantagande (en antites). Vi ger ett exempel:

Exempel 19: Låt $x, y \in \mathbb{R}$. Visa, att

om $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ och $y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ så gäller $xy \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Bevis: Anta, att $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ och $y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Vi gör ett motantagande: Anta, att $xy \notin \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, d.v.s. att $xy \in \mathbb{Q}$. Eftersom $y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ och $xy \in \mathbb{Q}$ så existerar det talen $a, b, c, d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ så att

$$y = \frac{a}{c} \quad \text{och} \quad xy = \frac{b}{d}.$$

Då är $x = xy \cdot y^{-1} = \frac{b}{d} \cdot \frac{c}{a} = \frac{bc}{ad} \in \mathbb{Q}$
eftersom $bc \in \mathbb{Z}$ och $ad \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.
Detta är en motsägelse, alltså gäller $xy \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. $\square$

I vissa fall kan det vara behändigt att använda ett motantagande i beviset av ett påstående som också går att bevisa direkt.

Exempel 20: Låt A, B och C vara mängder. Visa, att om $A \subset B$ och $A \not\subset C$ så gäller $B \not\subset C$.

Bevis: (med motantagande): Anta, att $A \subset B$ och $A \not\subset C$. Vi gör ett motantagande: Anta, att $B \subset C$. Då gäller $A \subset B \subset C$ (d.v.s. $A \subset B$ och $B \subset C$) och därmed $A \subset C$. Eftersom vi antog att $A \not\subset C$ så har vi alltså fått en motsägelse. Alltså gäller $B \not\subset C$.

Bevis 2: (direkt bevis): Anta, att $A \subset B$ och $A \not\subset C$. Då existerar ett element $x \in A$ som inte tillhör C, d.v.s. $x \in A$ och $x \notin C$. Eftersom $A \subset B$ så gäller $x \in B$. Alltså gäller $x \in B$ och $x \notin C$. Därmed gäller $B \not\subset C$. □

Potensmängden

Låt X vara en mängd. Mängden av alla delmängder till X kallas för potensmängden till X, betecknas $P(X)$.

D.v.s. $P(x) = \{A \mid A \subset X\}$

Exempel 21: Bestäm $P(x)$ då

(a) $X = \{1, 2\}$, (b) $X = \emptyset$

(c) $X = \{\emptyset\}$, (d) $X = \{1, \{1\}, \mathbb{N}\}$

(a) $P(x) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

(b) $P(\emptyset) = \emptyset$

(c) $P(x) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

(d) $P(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{\{1\}\}, \{\mathbb{N}\}, \{1, \{1\}\}, \{1, \mathbb{N}\}, \{\{1\}, \mathbb{N}\}, \{1, \{1\}, \mathbb{N}\}\}$

Regel: om X har $n \in \mathbb{N}$ element, så har $P(x)$ 2^n element.

ons 25.9

Lemma 22: Låt A, B och C vara mängder. Då gäller

$$A \subset B \cap C \text{ om och endast om}$$
$$A \subset B \text{ och } A \subset C.$$

Bevis: "$\Rightarrow$": Anta, att $A \subset B \cap C$. Anta därefter, att $x \in A$. Då gäller $x \in B \cap C$, d.v.s. $x \in B$ och $x \in C$. Därmed gäller $A \subset B$ och $A \subset C$.

"$\Leftarrow$": Anta, att $A \subset B$ och $A \subset C$. Anta, därefter att $x \in A$. Då gäller $x \in B$ och $x \in C$, d.v.s. $x \in B \cap C$. Därmed gäller $A \subset B \cap C$.

$\square$

Sats 23: Låt A och B vara mängder. Då gäller

$$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$$

Bevis: "$\subset$": Anta, att $X \in \mathcal{P}(A \cap B)$, d.v.s. att $X \subset A \cap B$. Enligt Lemma 22 gäller då att $X \subset A$ och $X \subset B$. Alltså gäller $X \in \mathcal{P}(A)$ och $X \in \mathcal{P}(B)$ och därmed $X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

"$\supset$": Anta, att $X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$. Då gäller $X \in \mathcal{P}(A)$ och $X \in \mathcal{P}(B)$, d.v.s. $X \subset A$ och $X \subset B$. Därmed, enligt Lemma 22, gäller $X \subset A \cap B$, d.v.s. $X \in \mathcal{P}(A \cap B)$.

$\square$

Kartesiska produkten

(R. Descartes 1600-talet)

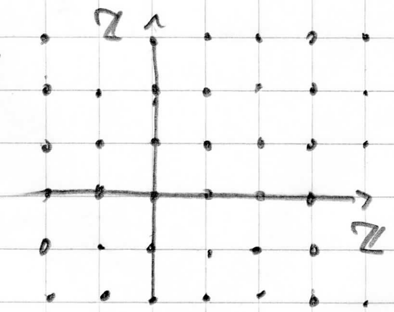
Den kartesiska produkten av två mängder A och B är mängden

$$A \times B = \{ (a,b) \mid a \in A \text{ och } b \in B \}$$

där (a,b) är ett s.k. ordnat par.
Notera, $(a,b) = (c,d)$ om och endast om $a=c$ och $b=d$.

Exempelvis $(1,2) \neq (2,1)$.

Exempel: $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$



Exempel 24: Bestäm den kartesiska produkten $A \times B$ då

(a) $A = \{1,2\}$, $B = \{1,3\}$

(b) $A = \{-1,0,2\}$, $B = \{5,7\}$

(c) $A = \{\emptyset, \{1\}\}$, $B = \{\mathbb{N}, 1\}$

(d) $A = \{1\}$, $B = \mathbb{N}$.

(a) $A \times B = \{ (1,1), (1,3), (2,1), (2,3) \}$

(b) $A \times B = \{ (-1,5), (-1,7), (0,5), (0,7), (2,5), (2,7) \}$

(c) $A \times B = \{ (\emptyset, \mathbb{N}), (\emptyset, 1), (\{1\}, \mathbb{N}), (\{1\}, 1) \}$

(d) $A \times B = \{ (1,0), (1,1), (1,2), (1,3), \dots \}$
$= \{ (1,n) \mid n \in \mathbb{N} \}$

Exempel 25: Låt $A=\{0,1\}$, $B=\{1,2\}$, $C=\{2\}$

Bestäm (a) $C\times(A\cup B)$

(b) $A\times(B\cap C)$

(c) $(A\times B)\cap(A\times C)$

(d) $\emptyset\times(A\cup B)$

(a) $C\times(A\cup B)=\{2\}\times\{0,1,2\}=\{(2,0),(2,1),(2,2)\}$

(b) $A\times(B\cap C)=\{0,1\}\times\{2\}=\{(0,2),(1,2)\}$

(c) $(A\times B)\cap(A\times C)=\{(0,1),(0,2),(1,1),(1,2)\}\cap\{(0,2),(1,2)\}$

$=\{(0,2),(1,2)\}$

(d) $\emptyset\times(A\cup B)=\{(x,y)\mid x\in\emptyset,\ y\in A\cup B\}$

$=\emptyset$

Notera, (b) och (c) är samma mängd. Detta är ingen slump, eftersom:

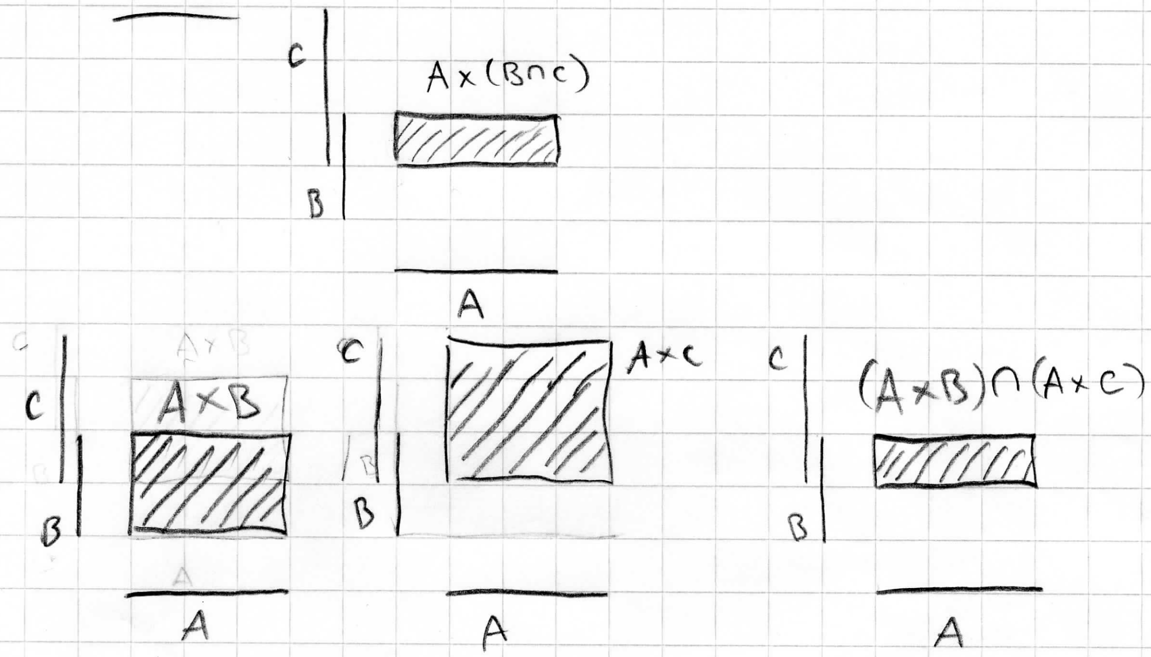
Exempel 26: Visa, att $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$ för varje mängd A, B och C.

"$\subset$": anta, att $x\in A\times(B\cap C)$. Då är $x=(a,b)$ för något $a\in A$ och $b\in B\cap C$. Eftersom $b\in B$ och $b\in C$, så gäller $(a,b)\in A\times B$ och $(a,b)\in A\times C$, d.v.s. $x\in(A\times B)\cap(A\times C)$

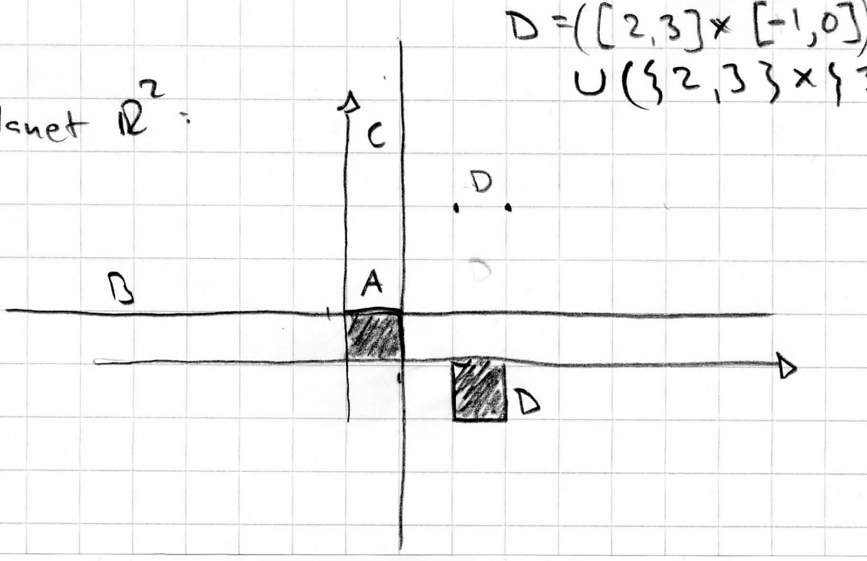
"$\supset$": anta, att $x \in (A\times B)\cap(A\times C)$. Då gäller $x\in A\times B$ och $x \in A\times C$, d.v.s. $x=(a,b)$ och $x=(\hat{a}, c)$, där $a,\hat{a}\in A$, $b\in B$ och $c \in C$. Eftersom $(a,b)=(\hat{a},c)$ så gäller $a=\hat{a}$ och $b=c$.

Därmed $x=(a,b)$ där $a\in A$ och $b\in B\cap C$. alltså $x\in A\times(B\cap C)$.

<u>Bilder:</u>



<u>Exempel 26</u>: Rita mängderna
$$A=[0,1]\times[0,1]$$
$$B=\mathbb{R}\times\{1\}$$
$$C=\{1\}\times\mathbb{R}$$
$$D=([2,3]\times[-1,0])\cup(\{2,3\}\times\{3\})$$
i planet $\mathbb{R}^2$:



<u>Övs 2.10</u>

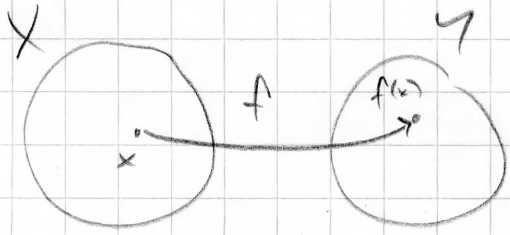
Avbildningar (funktioner)

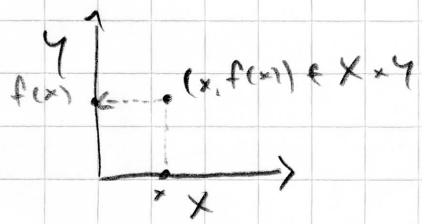
Definition: Låt X och Y vara mängder.
En avbildning (funktion) från X till Y är en regel som definierar exakt ett element i Y till varje element i X.

$f: X \to Y$ betecknar att f är en avbildning från X till Y. (används även $X \xrightarrow{f} Y$)

Här är X definitionsmängden till f och
Y målmängden till f.

För $x \in X$ betecknar vi det unika elementet $y \in Y$ som f definierar med $f(x)$.





Exempel 27: Vilka av följande regler definierar en avbildning från $\mathbb{Q}$ till $\mathbb{Q}$?

(a) $f(x) = |x|$, (b) $f(x) = x/2$

(c) $x \mapsto \sqrt{x}$, (d) $\frac{a}{b} \mapsto a+b$, $a,b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$.

($x \mapsto \sqrt{x}$ betecknar att $f(x) = |x|$)

(a) f är en avbildning $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ eftersom $|x| \in \mathbb{Q}$ för alla $x \in \mathbb{Q}$ och $|x|$ är entydigt definierad

(b) f är en avbildning $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ eftersom $x/2 \in \mathbb{Q}$ för alla $x \in \mathbb{Q}$ och $x/2$ är entydigt definierad.

(c) f är ej en avbildning $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ eftersom t.ex. $f(2) = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

(d) f är ej en avbildning $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ eftersom

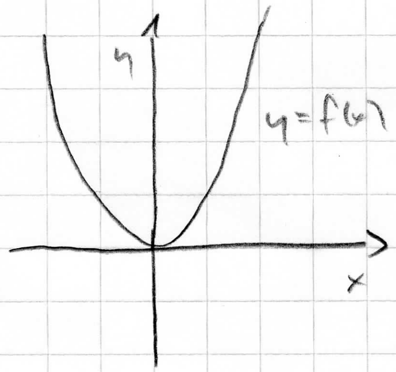
$$1 = \frac{1}{1} = \frac{2}{2} \quad \text{men} \quad f\left(\frac{1}{1}\right) = 1+1 = 2 \neq 4 = 2+2 = f\left(\frac{2}{2}\right)$$

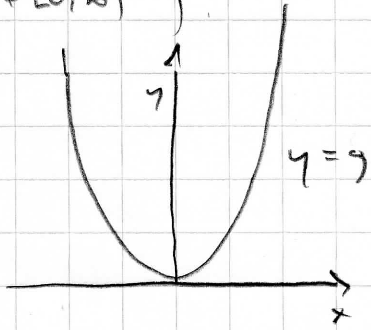
Därmed är $f(1)$ ej entydigt definierad.

Avbildningarna $f : X \to Y$ och $g : V \to W$ är <u>identiska</u>, $f = g$, om

- $X = V$
- $Y = W$
- $f(x) = g(x)$ för alla $x \in X = V$.

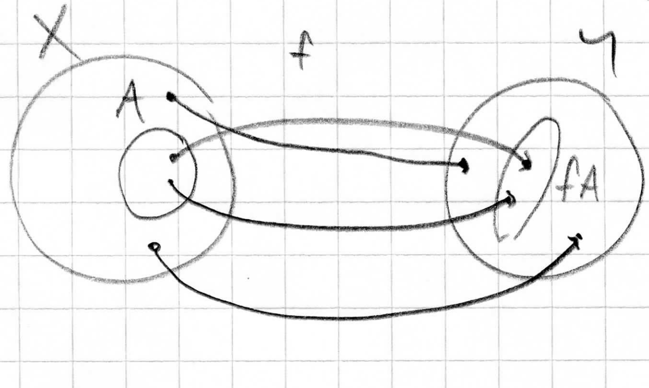
Notera: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ och $g : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $g(x) = x^2$ är inte identiska ($\mathbb{R} \neq [0, \infty)$).





Låt $f : X \to Y$ vara en avbildning och $A \subset X$.
Då är <u>bilden</u> av A för avbildningen f mängden

$$fA = \{ y \in Y \mid y = f(x) \text{ för något } x \in X \}$$
$$= \{ f(x) \mid x \in X \}$$



Exempel 28: Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ och $A = \{-1, 0, 1\}$. Bestäm

(a) fA (b) $f[A \setminus \{0\}]$

(a) $fA = \{ f(x) \mid x \in A \}$

$= \{ f(-1), f(0), f(1) \}$

$= \{ 1, 0, 1 \} = \{0, 1\}$

(b) $f[A \setminus \{0\}] = f\{-1, 1\}$

$= \{ f(x) \mid x \in \{-1, 1\} \}$

$= \{ f(-1), f(1) \}$

$= \{ 1, 1 \} = \{1\}$

Exempel 29: Låt $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2x - 3$ och $B =]0, 5]$. Bestäm gB.

$gB = \{ g(x) \mid x \in B \}$

$= \{ 2x-3 \mid 0 < x \leq 5 \}$

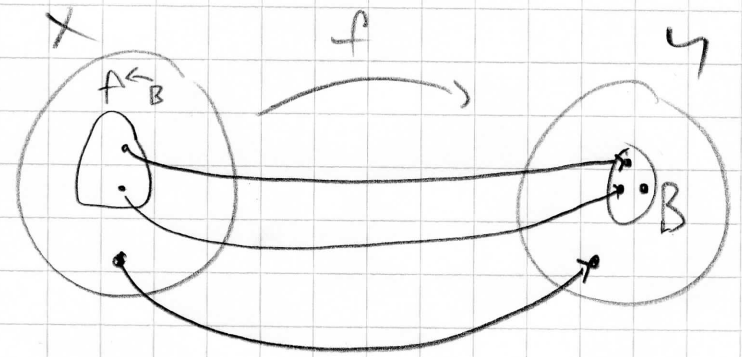
$= \{ 2x-3 \mid -3 < 2x-3 \leq 7 \}$ $\quad \left(0 < x \leq 5 \Leftrightarrow 0 < 2x \leq 10 \Leftrightarrow -3 < 2x-3 \leq 7 \right)$

$= \{ y \mid -3 < y \leq 7 \}$

$=]-3, 7]$

Låt $f: X \to Y$ vara en avbildning och $B \subset Y$.
Då är <u>urbilden</u> av A för f mängden

$$f^{\leftarrow}B = \{x \in X \mid f(x) \in B\} \quad (\text{bet. även } f^{-1}B)$$



Exempel 30: Låt $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto n^2 - 2$, och $B = [-5, 0]$, $C = [0, 1]$.

Bestäm $f^{\leftarrow}B$ och $f^{\leftarrow}C$.

$$f^{\leftarrow}B = \{n \in \mathbb{Z} \mid f(n) \in B\}$$
$$= \{n \in \mathbb{Z} \mid -5 \le n^2 - 2 \le 0\}$$
$$= \{n \in \mathbb{Z} \mid -3 \le n^2 \le 2\}$$
$$= \{n \in \mathbb{Z} \mid 0 \le n^2 \le 2\} \quad (n^2 \ge 0 \ \forall n \in \mathbb{Z})$$
$$= \{n \in \mathbb{Z} \mid -\sqrt{2} \le n \le \sqrt{2}\}$$
$$= \{-1, 0, 1\}$$

$$f^{\leftarrow}C = \{n \in \mathbb{Z} \mid f(n) \in C\}$$
$$= \{n \in \mathbb{Z} \mid 0 \le n^2 - 2 \le 1\}$$
$$= \{n \in \mathbb{Z} \mid 2 \le n^2 \le 3\}$$

ons 30.10.

$$= \{n \in \mathbb{Z} \mid \sqrt{2} \le n \le \sqrt{3} \text{ eller } -\sqrt{3} \le n \le -\sqrt{2}\} = \underline{\underline{\emptyset}}$$

$= \{-1, 0, 1\}$

$f^{\leftarrow} C = \{n \in \mathbb{Z} \mid f(n) \in C\}$

$= \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 - 2 \in [0,1]\}$

$= \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 \in [2,3]\}$

$= \{n \in \mathbb{Z} \mid n \in [\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ eller $n \in [-\sqrt{3}, -\sqrt{2}]\}$

$= \emptyset$

Lemma 32: Låt $f: X \to Y$ vara en avbildning och $A, B \subset X$ samt $C, D \subset Y$. Då gäller

(i) $f[A \cup B] = fA \cup fB$

(ii) $f^{\leftarrow}[C \cap D] = f^{\leftarrow}C \cap f^{\leftarrow}D$

Bevis. (i) "$\subset$": Vi antar, att $y \in f[A \cup B]$, d.v.s. $y \in \{f(x) \mid x \in A \cup B\}$. Alltså gäller $y = f(x)$ för något $x \in A \cup B$.

- om $x \in A$ så gäller $y = f(x) \in fA$ och därmed $y \in fA \cup fB$
- om $x \in B$ så gäller $y = f(x) \in fB$ och därmed $y \in fA \cup fB$.

Alltså gäller $y \in fA \cup fB$.

"$\supset$": Vi antar, att $y \in fA \cup fB$.

- om $y \in fA$ så gäller $y = f(x)$ för något $x \in A$ och därmed gäller $y = f(x)$ för något $x \in A \cup B$, d.v.s. $y \in f[A \cup B]$

- Om $y \in f B$ så gäller $y = f(x)$ för något $x \in B$ och därmed gäller $y = f(x)$ för något $x \in A \cup B$, d.v.s. $y \in f[A \cup B]$.

Alltså $y \in f[A \cup B]$.

(ii) "$\subseteq$": Vi antar, att $x \in f^{\leftarrow}[C \cap D]$. Då gäller $f(x) \in C \cap D$, d.v.s. $f(x) \in C$ och $f(x) \in D$. Alltså $x \in f^{\leftarrow}C$ och $x \in f^{\leftarrow}D$ och därmed $x \in f^{\leftarrow}C \cap f^{\leftarrow}D$.

"$\supseteq$": Vi antar, att $x \in f^{\leftarrow}C \cap f^{\leftarrow}D$. Då gäller $x \in f^{\leftarrow}C$ och $x \in f^{\leftarrow}D$, d.v.s. $f(x) \in C$ och $f(x) \in D$. Alltså $f(x) \in C \cap D$ och därmed $x \in f^{\leftarrow}[C \cap D]$.

<u>Definition</u>: En avbildning $f: X \to Y$ är en <u>injektion</u> om för varje $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ gäller $f(x_1) \neq f(x_2)$

[<u>Ekvivalent definition</u>: $f: X \to Y$ är en injektion om och endast om för varje $x_1, x_2 \in X$ så att $f(x_1) = f(x_2)$ gäller $x_1 = x_2$.]

<u>Exempel 33</u>: Vilka av följande funktioner är injektioner?

(a) $f: \{0, 1, 2\} \to \mathbb{R}$, $0 \mapsto 1$, $1 \mapsto 1$, $2 \mapsto 5$

(b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{2} + 1$

(c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

(d) $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x-1}$

(a) f är inte en injektion eftersom $0 \neq 1$ men $f(0) = 1 = f(1)$.

(b) f är en injektion: Anta att $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ så att $f(x_1) = f(x_2)$, d.v.s.

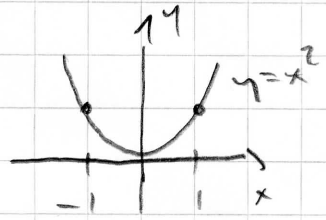
$$x_1/2 + 1 = x_2/2 + 1$$

Då är $x_1/2 = x_2/2$

och därmed $x_1 = x_2$

(c) f är inte en injektion eftersom $-1 \neq 1$

men $f(-1) = 1 = f(1)$



(d) f är en injektion: Anta att $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ så att $f(x_1) = f(x_2)$, d.v.s.

$$\frac{x_1}{x_1 - 1} = \frac{x_2}{x_2 - 1}$$

Då gäller $x_1(x_2 - 1) = x_2(x_1 - 1)$

d.v.s. $x_1 x_2 - x_1 = x_2 x_1 - x_2$

Alltså $-x_1 = -x_2$

och därmed $x_1 = x_2$

Definition: En avbildning $f: X \to Y$ är en surjektion om för varje $y \in Y$ existerar åtminstone ett element $x \in X$ så att $f(x) = y$.

Sats 34: Låt $f: X \to Y$ vara en avbildning. Då är f en surjektion om och endast om $fX = Y$.

Bevis: "$\Rightarrow$" Anta att f är en surjektion. Vi visar att $fX = Y$.

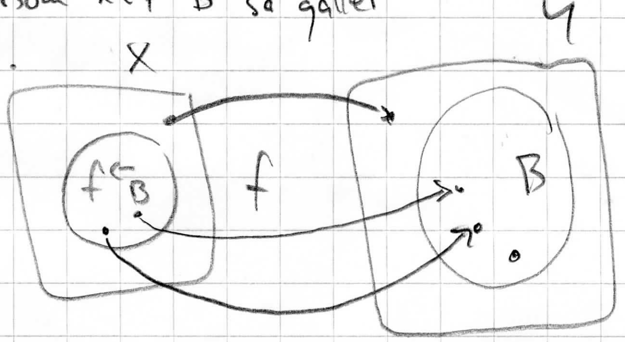
"$\subset$": gäller alltid.

"$\supset$": anta att $y \in Y$. Eftersom f är surjektiv finns det ett element $x \in X$ så att $f(x) = y$.
Därmed $y \in fX$ $\left(= \{ y \in X \mid y = f(x) \text{ för något } x \in X \} \right)$

"$\Leftarrow$" Anta att $fX = Y$. Låt $y \in Y$. Då är $y \in fX$ och därmed $y = f(x)$ för något $x \in X$.
Alltså är f en surjektion.

Sats 35: Låt $f: X \to Y$ vara en avbildning och $B \subset Y$. Då gäller $ff^{\leftarrow}B \subset B$.

Bevis: Anta att $y \in ff^{\leftarrow}B$. Då är $y = f(x)$ för något $x \in f^{\leftarrow}B$. Eftersom $x \in f^{\leftarrow}B$ så gäller $f(x) \in B$, alltså $y \in B$.
$\therefore ff^{\leftarrow}B \subset B$.



Sats 36: Låt $f: X \to Y$ vara en avbildning. Då är f surjektiv om och endast om $ff^{\leftarrow}B = B$ för alla $B \subset Y$.

Bevis: "$\Rightarrow$" Anta att f är surjektiv. Låt $B \subset Y$. Vi visar att $ff^{\leftarrow}B = B$.

"$\subset$": gäller alltid (sats 35)

"$\supseteq$": Anta att $y \in B$. Eftersom f är surjektiv existerar ett element $x \in X$ så att $f(x) = y$. Per definition $x \in f^{\leftarrow}B$ och därmed $y = f(x) \in f f^{\leftarrow}B$.

"$\Leftarrow$" Anta att $f f^{\leftarrow} B = B$ för alla $B \subset Y$. I synnerhet gäller då $fX = f f^{\leftarrow} Y = Y$ och därmed är f surjektiv (sats).

Exempel 37: Vilka av följande avbildningar är surjektioner?

(a) $f: \{0,1,2\} \to \{0,1\}$, $0 \mapsto 1$, $1 \mapsto 1$, $2 \mapsto 0$.

(b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

(c) $f: \mathbb{R} \to [0,\infty)$, $f(x) = x^2$

(d) $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$

(a) f är en surjektion eftersom $f\{0,1,2\} = \{0,1\}$

(b) f är inte en surjektion eftersom $-1 \in \mathbb{R}$ men det existerar inte ett tal $x \in \mathbb{R}$ s.a. $f(x) = x^2 = -1$

(c) f är en surjektion: Låt $y \in [0,\infty)$. Beteckna $x = \sqrt{y}$. Då är $x \in \mathbb{R}$ och $f(x) = x^2 = (\sqrt{y})^2 = y$

(d) Låt $y \in \mathbb{R}$. Vi undersöker ekvationen $f(x) = y$ där $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$:

$$\frac{x}{x-1} = y \Rightarrow x = (x-1)y$$
$$\Rightarrow x = xy - y$$
$$\Rightarrow x - xy = -y$$
$$\Rightarrow x(1-y) = -y$$

Vi ser att om $y=1$ så är sista likheten $0=-1$ vilket är en motsägelse. Alltså existerar det inte ett tal $x\in\mathbb{R}$ så att $f(x)=1$. f är därmed inte surjektiv.

ons 6.11

Låt $f: X\to Y$ och $g: Y\to Z$ vara avbildningar. Den sammansatta avbildningen $g\circ f$ ("g boll f")

är avbildningen $g\circ f: X\to Z$, $(g\circ f)(x)=g(f(x))$

Obs: Målmängden för f och definitionsmängden för g måste vara identiska för att kunna definiera $g\circ f$.

Exempel 38: Vilka av $f\circ g$, $g\circ f$, $f\circ f$ och $g\circ g$ är väldefinierade då

(a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1+2x$ och $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=(x-1)^2$

(b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2-x$ och $g:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\sqrt{x}-1$?

Bestäm de väldefinierade avbildningarna.

(a) Alla är väldefinierade.

$$f\circ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ (f\circ g)(x)=f(g(x))=1+2g(x)$$
$$=1+2(x-1)^2$$
$$=1+2(x^2-2x+1)$$
$$=2x^2-4x+3$$

$$g\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ (g\circ f)(x)=g(f(x))=(f(x)-1)^2$$
$$=(1+2x-1)^2$$
$$=(2x)^2$$
$$=4x^2$$

$f \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = 1 + 2f(x)$
$= 1 + 2(1 + 2x)$
$= 4x + 3$

$g \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(g \circ g)(x) = g(g(x)) = (g(x) - 1)^2$
$= ((x-1)^2 - 1)^2$
$= (x^2 - 2x + 1 - 1)^2$
$= (x^2 - 2x)^2$
$= x^4 - 4x^3 + 4x^2$

(b) $g \circ f$ och $g \circ g$ är inte definierade eftersom målmängden för f och g är $\mathbb{R}$ medan definitionsmängden för g är $[0, \infty)$ $(\neq \mathbb{R})$

$f \circ g$ och $f \circ f$ är väldefinierade.

$f \circ g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2 - g(x)$
$= 2 - (\sqrt{x} - 1)$
$= 3 - \sqrt{x}$

$f \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = 2 - f(x)$
$= 2 - (2 - x)$
$= x$

Sats 39: Låt $f : X \to Y$ och $g : Y \to Z$ vara avbildningar. Visa, att

(a) om $g \circ f$ är injektiv så är f injektiv

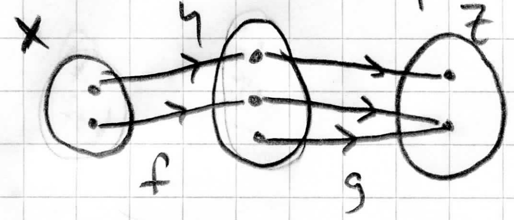
(b) om $g \circ f$ är surjektiv så är g surjektiv.

(a) Anta, att $g \circ f$ är injektiv. Vi visar att f är injektiv & anta att $x, y \in X$ för vilka $f(x) = f(y)$ gäller. Då gäller $g(f(x)) = g(f(y))$, d.v.s. $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$. Eftersom $g \circ f$ är injektiv så gäller $x = y$. Alltså är f injektiv.

(b) Anta, att $g \circ f$ är surjektiv. Vi visar, att g är surjektiv: Anta, att $z \in Z$. Eftersom $g \circ f$ är surjektiv, så existerar ett $x \in X$ så att $z = (g \circ f)(x)$. Låt $y = f(x)$. Då är $z = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y)$. Alltså är g surjektiv.

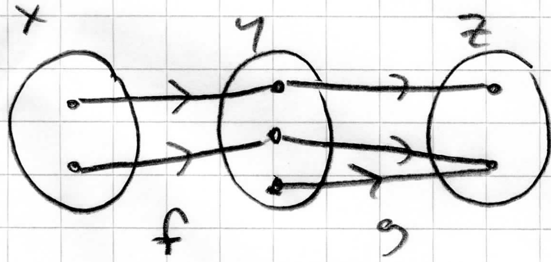
<u>Obs</u>. g behöver inte vara injektiv i (a)

<u>Ex</u>.



f behöver inte vara surjektiv i (b)

<u>Ex</u>.



"<u>Intermezzo</u>": Den II:a induktionsprincipen.

Låt P vara ett påstående om naturliga tal så att

- P gäller för talet 0.
- Alltid då vi antar, att för ett godtyckligt $k \in \mathbb{N}$ gäller P för varje tal $0, 1, \ldots, k-1, k$, så gäller P för $k+1$.

Då gäller P för alla $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsbevis med den II:a induktionsprincipen sker alltså på följande sätt:

<u>Bassteg</u>: Vi visar att P gäller för 0.

<u>Induktionssteg</u>: Vi gör induktionsantagandet:

Vi antar, att för något $k \in \mathbb{N}$ gäller P för varje tal $0, 1, \ldots, k-1, k$.

Vi visar, att P gäller för $k+1$.

$\therefore$ Då gäller P för alla $n \in \mathbb{N}$ på basis av den II:a induktionsprincipen.

<u>Exempel 40</u>: Vi definierar rekursivt följande talföljd:

$$x_0 = 2, \quad x_1 = 1 \text{ och } x_{n+1} = x_n + 2x_{n-1} \text{ för alla } n \geq 1.$$

(a) Bestäm x_2, x_3, x_4 och x_5.

(b) Hitta den explicita formen för talföljden, samt bevisa med induktion att formen stämmer.

(a) $x_2 = x_1 + 2x_0 = 1 + 2 \cdot 2 = 5$
$x_3 = x_2 + 2 \cdot x_1 = 5 + 2 \cdot 1 = 7$
$x_4 = x_3 + 2 \cdot x_2 = 7 + 2 \cdot 5 = 17$
$x_5 = x_4 + 2x_3 = 17 + 2 \cdot 7 = 31$

(b) sex första elementen: $2, 1, 5, 7, 17, 31$
Vi jämför med följden $y_n = 2^n$: $1, 2, 4, 8, 16, 32$

Vi ser att formeln $z_n = 2^n + (-1)^n$ har samma sex första element.

39

Vi visar att $x_n = 2^n + (-1)^n$ för alla $n \in \mathbb{N}$.

Bassteg: $n=0$: $x_0 = 2 = 2^0 + (-1)^0$

Induktionssteg: Vi antar, att för något $k \in \mathbb{N}$ gäller

$$x_m = 2^m + (-1)^m \text{ för alla } m \in \mathbb{N},\ 0 \le m \le k.$$

Vi visar, att $x_{k+1} = 2^{k+1} + (-1)^{k+1}$:

$k=0$: $x_{k+1} = x_1 = 1 = 2^1 + (-1)^1 = 2^{k+1} + (-1)^{k+1}$.

$k \ge 1$:
$$\begin{aligned}
x_{k+1} = x_k + 2x_{k-1} &\overset{\text{i.a.}}{=} 2^k + (-1)^k + 2\left(2^{k-1} + (-1)^{k-1}\right) \\
&= 2^k + (-1)^k + 2 \cdot 2^{k-1} + 2 \cdot (-1)^{k-1} \\
&= 2^k + (-1)(-1)^{k-1} + 2^k + 2 \cdot (-1)^{k-1} \\
&= 2 \cdot 2^k + (-1)^{k-1}(-1+2) \\
&= 2^{k+1} + (-1)^{k-1} \cdot (-1)^2 \\
&= 2^{k+1} + (-1)^{k+1}
\end{aligned}$$

$\therefore$ På basis av II:a induktionsprincipen så gäller

$$x_n = 2^n + (-1)^n \text{ för alla } n \in \mathbb{N}.$$

"fine dell' Intermezzo"

ons 13.11

Låt X vara en mängd. Den identiska avbildningen för X är avbildningen

$$id_X : X \to X \ , \ id_X(x) = x.$$

- För varje avbildning $f: X \to X$ gäller

$f \circ id_X$ och $id_X \circ f$, eftersom

$(f \circ id_X)(x) = f(id_X(x)) = f(x)$ och
$(id_X \circ f)(x) = id_X(f(x)) = f(x)$ för alla $x \in X$.

Låt $f: X \to Y$ vara en avbildning. Om det finns en avbildning $g: Y \to X$ så att

$f \circ g = id_Y$ och $g \circ f = id_X$ så kallas g den inversa avbildningen till f och betecknas med f^{-1}

Sats 41: En avbildning $f: X \to Y$ har högst en invers avbildning.

Anta, att $g: Y \to X$ och $h: Y \to X$ är inversa avbildningar till f. Då är

$$\begin{aligned} h(y) = h(id_Y(y)) &= h((f \circ g)(y)) \\ &= h(f(g(y))) \\ &= (h \circ f)(g(y)) \\ &= id_X(g(y)) \\ &= g(y) \quad \text{för alla } y \in Y. \end{aligned}$$

Alltså är $g = h$.

Exempel 42: Låt

(a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{x}{2}$

(b) $f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $f(x) = \frac{1}{x}$

$g = f$

(c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 5$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt[3]{x} - 5$

Är g inversa avbildningen till f?

(a) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{f(x)}{2} = \frac{2x}{2} = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2g(x) = 2 \cdot \frac{x}{2} = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Alltså $g \circ f = f \circ g = id_{\mathbb{R}}$. Svar: Ja

(b) $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)} = x \quad \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

Alltså $f \circ f = id_{\mathbb{R}}$. Svar: Ja.

(c) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x)^3 + 5 = (\sqrt[3]{x} - 5)^3 + 5$

Nu, för t.ex. är $x = 1$ är $(f \circ g)(1) = (\sqrt[3]{1} - 5)^3 + 5$

$= (-4)^3 + 5$

$= -59 \neq 1 = id_{\mathbb{R}}(1)$

Alltså $f \circ g \neq id_{\mathbb{R}}$. Svar: Nej.

Exempel 43: Låt $h: \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}\setminus\{2\}$,

$$h(x) = \frac{2x}{x-1}$$

Bestäm inversen till h ifall den existerar.

- Först och främst är h väldefinierad, eftersom

$$h(x) \neq 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}.$$

$$\left(h(x) = 2 \iff \frac{2x}{x-1} = 2 \iff 2x = 2(x-1) \right.$$
$$\left. \iff 2x = 2x - 2 \iff 0 = -2 \quad \lightning \right)$$

Låt $y \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$. Då gäller för $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$:

$$h(x) = y \iff \frac{2x}{x-1} = y \iff 2x = y(x-1)$$
$$\iff 2x = xy - y \iff 2x - xy = -y$$
$$\iff x(2-y) = -y \iff x = \frac{-y}{2-y}$$

Låt $g: \mathbb{R}\setminus\{2\} \to \mathbb{R}\setminus\{1\}$,

$$g(t) = \frac{-t}{2-t}$$

- Notera att g är väldefinierad: $g(t) \neq 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$

$$\left(g(t) = 1 \iff \frac{-t}{2-t} = 1 \iff -t = 2-t \iff 0 = 2 \quad \lightning \right)$$

- $h \circ g$ och $g \circ h$ är väldefinierade

$$(h \circ g)(t) = h(g(t)) = \frac{2g(t)}{g(t)-1} = \frac{2\left(\frac{-t}{2-t}\right)}{\left(\frac{-t}{2-t}\right) - 1} = \frac{\left(\frac{-2t}{2-t}\right)}{\left(\frac{-t-(2-t)}{2-t}\right)} =$$

$$\frac{-2t}{2-t}\cdot\frac{2-t}{-t-(2-t)}=\frac{-2t}{-t-2+t}=\frac{-2t}{-2}=t$$

$\forall t \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$

$$(g\circ h)(x)=g(h(x))=\frac{-h(x)}{2-h(x)}=\frac{-\left(\frac{-2x}{x-1}\right)}{2-\left(\frac{-2x}{x-1}\right)}$$

$$=\frac{\left(\frac{-2x}{x-1}\right)}{\left(\frac{2(x-1)-2x}{x-1}\right)}=\frac{-2x}{x-1}\cdot\frac{x-1}{2(x-1)-2x}$$

$$=\frac{-2x}{2(x-1)-2x}=\frac{-2x}{2x-2-2x}=\frac{-2x}{-2}=x$$

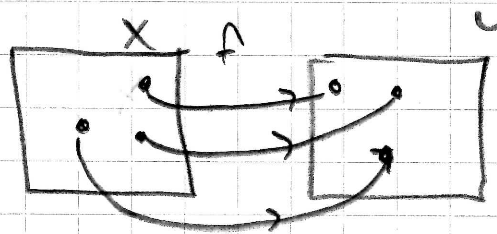
$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$

Alltså $h\circ g = id_{\mathbb{R}\setminus\{2\}}$ och $g\circ h = id_{\mathbb{R}\setminus\{1\}}$

och därmed är h inverterbar och $h^{-1}=g$.

Låt $f: X \to Y$ vara en avbildning. Om f är injektiv och surjektiv så kallar vi f en bijektion.

f är alltså bijektiv om och endast om för varje $y \in Y$ existerar exakt ett element $x \in X$ så att $f(x)=y$



Sats 44: En avbildning $f: X \to Y$ är bijektiv om och endast om f har en invers avbildning.

Bevis:

"$\Rightarrow$": Anta, att f är bijektiv. Då existerar det för varje $y \in Y$ exakt ett element $x \in X$ så att $f(x) = y$. Vi betecknar $g(y) = x$, dvs

$$g(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$$

Då är $g: Y \to X$, $y \mapsto g(y)$ en väldefinierad avbildning. I tillägg; för varje $x \in X$ gäller

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = x \quad \text{där } y = f(x)$$

och för varje $y \in Y$ gäller

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(x) = y \quad \text{där } x = g(y)$$

Alltså $g \circ f = id_X$ och $f \circ g = id_Y$ och därmed har f en invers, nämligen g.

"$\Leftarrow$" Anta, att inversen $f^{-1}: Y \to X$ existerar.

- f är injektiv: anta, att $x_1, x_2 \in X$ för vilka $f(x_1) = f(x_2)$. Då är

$$\begin{aligned} x_1 &= id_X(x_1) = (f^{-1} \circ f)(x_1) \\ &= f^{-1}(f(x_1)) = f^{-1}(f(x_2)) \\ &= (f^{-1} \circ f)(x_2) = id_X(x_2) \\ &= x_2. \end{aligned}$$

Alltså är f injektiv.

• f är surjektiv: Låt $y \in Y$. Beteckna $x = f^{-1}(y)$.

$$\text{Då är } f(x) = f(f^{-1}(y)) = (f \circ f^{-1})(y) = id_Y(y) = y$$

Alltså är f surjektiv.

$\therefore$ f är injektiv och surjektiv, alltså bijektiv. $\square$

Exempel 45: Bestäm inversen till $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3 - x$ om den existerar.

f är inte injektiv: $f(0) = 0^3 - 0 = 0$ och $f(1) = 1^3 - 1 = 0$.

Sats 44 $\Rightarrow$ f har ingen invers.

Relationer

Definition: Låt X och Y vara mängder. En relation R mellan X och Y är en delmängd $R \subset X \times Y$.

$R \subset X \times X$ är en relation på mängden X.

Beteckningen aRb betyder $(a,b) \in R$,

"a är i relation med b".

Exempel 46: Låt $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

Låt R vara följande relation på A:

$R = \{ (a,b) \in A \times A \mid a+b \text{ är ett jämnt tal} \}$

Kom ihåg: jämna tal: $\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots$

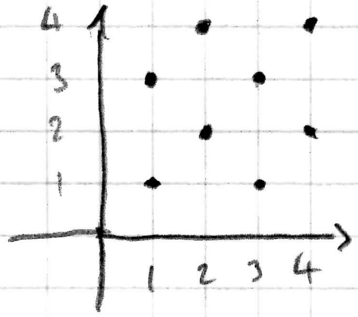
(a) Räkna upp elementen i R

(b) Presentera R i ett koordinatsystem

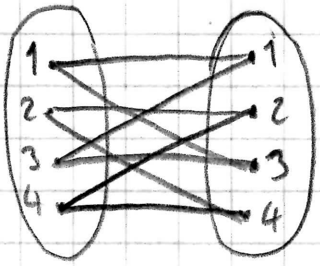
(c) Presentera R i ett pildiagram.

(a) $R = \{ (1,1), (1,3), (2,2), (2,4), (3,1), (3,3), (4,2), (4,4) \}$

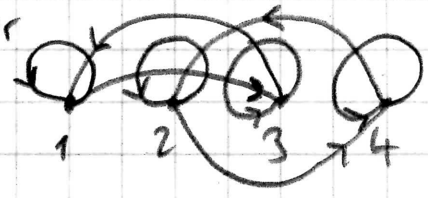
(b)



(c)



eller



ons 20.11

Exempel 47: Låt $A=\{1,2,3\}$, $B=\{1,2\}$ och $R=\{(1,1),(2,3)\}$

Är R en relation (i) mellan A och B?
(ii) mellan B och A?
(iii) på mängden A?
(iv) på mängden B?

(i) $R \not\subset A\times B$, eftersom $(2,3)\in R$ men $(2,3)\notin A\times B$
(ii) $R \subset B\times A$, eftersom $(1,1)\in B\times A$ och $(2,3)\in B\times A$.
(iii) $R\subset A\times A$, eftersom $(1,1)\in A\times A$ och $(1,1)\in A\times A$
(iv) $R\not\subset B\times B$, eftersom $(2,3)\in R$ men $(2,3)\notin B\times B$

Låt R vara en relation på mängden X (d.v.s. $R\subset X\times X$)

R är
- reflexiv om $(x,x)\in R \ \forall x\in X$
- symmetrisk om för alla $(a,b)\in R$ gäller även $(b,a)\in R$
- transitiv om alltid då $(a,b)\in R$ och $(b,c)\in R$ gäller även $(a,c)\in R$.

Med andra beteckningar: reflexiv: $\forall x\in X : xRx$
symmetrisk: $aRb \Rightarrow bRa$
transitiv: $(aRb \wedge bRc) \Rightarrow aRc$.

Exempel 48: Vi definierar en relation R på mängden $\mathbb{Z}$ genom aRb om $a<b$.

Är R reflexiv? Symmetrisk? Transitiv?

R är alltså mängden $R = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a<b\}$

R är ej reflexiv eftersom $0 \not< 0$ och därmed $(0,0) \notin R$.

R är ej symmetrisk: om $(a,b) \in R$ d.v.s. $a<b$ så gäller inte $b<a$, alltså $(b,a) \notin R$.

R är transitiv: om $(a,b) \in R$ och $(b,c) \in R$, d.v.s. $a<b$ och $b<c$ så gäller $a<c$, d.v.s. $(a,c) \in R$.

Exempel 149: Definiera relationen R på mängden $\mathbb{R}$ genom aRb om $a-b \in \mathbb{Z}$.

Är R reflexiv? Symmetrisk? Transitiv?

R är reflexiv: $a-a=0 \in \mathbb{Z}$ för alla $a \in \mathbb{R}$ och därmed aRa $\forall a \in \mathbb{R}$.

R är symmetrisk: Om aRb d.v.s. $a-b \in \mathbb{Z}$ så gäller $b-a = -(a-b) \in \mathbb{Z}$, och därmed bRa.

R är transitiv: Om aRb och bRc, d.v.s. $a-b \in \mathbb{Z}$ och $b-c \in \mathbb{Z}$ så gäller $a-c = \underbrace{(a-b)}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{(b-c)}_{\in \mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}$.

Alltså aRc.

<u>Definition</u>: Låt R vara en relation på mängden X. Om R är reflexiv, symmetrisk och transitiv så kallas R en <u>ekvivalensrelation</u>.

- Relationen i exempel 4c är alltså en ekvivalensrelation.

Ett annat exempel: Låt S beteckna mängden av alla svenska ord. Låt T vara relationen

$$T = \{(a,b) \in S \times S \mid \text{orden } a \text{ och } b \text{ börjar med samma bokstav}\}$$

T är reflexiv: om $a \in S$ så börjar a med samma bokstav som a, d.v.s. $(a,a) \in T$

T är symmetrisk: om aTb så börjar a och b med samma bokstav alltså börjar b och a med samma bokstav, d.v.s. bTa

T är transitiv: om aTb och bTc så börjar a och b med samma bokstav och b och c börjar " ". Alltså börjar a och c " ", d.v.s. aTc.

Låt R vara en ekvivalensrelation på X. För $x \in X$ är <u>ekvivalensklassen</u> till element x följande delmängd till X:

$$[x]_R = \{y \in X : (y,x) \in R\} \quad (= \{y \in X : yRx\})$$

Vi betecknar mängden av alla ekvivalensklasser med X/R, d.v.s.

$$X/R = \{[x]_R \mid x \in X\}$$

Sats 50: Låt R vara en ekvivalensrelation på mängden $X \neq \emptyset$. Låt $x, y \in X$. Då gäller

(i) $x \in [y]_R$ om och endast om $[x]_R = [y]_R$

(ii) Om $[x]_R \neq [y]_R$ så gäller $[x]_R \cap [y]_R = \emptyset$

(iii) $X = \bigcup_{x \in X} [x]_R$

(Kom ihåg: $\bigcup_{x \in X} [x]_R = \{ y \mid y \in [x]_R$ för något $x \in X \}$)

Bevis: (i) "$\Rightarrow$" Anta $x \in [y]_R$. Vi visar $[x]_R = [y]_R$.

"$\subseteq$": Anta $a \in [x]_R$. Då gäller $(a,x) \in R$.
Eftersom $x \in [y]_R$ så gäller $(x,y) \in R$.
Transitivitet $\Rightarrow$ $(a,y) \in R$ och därmed
$a \in [y]_R$.

"$\supseteq$": Anta $b \in [y]_R$. Då gäller $(b,y) \in R$
Eftersom $x \in [y]_R$ så gäller $(x,y) \in R$

Symmetrin $\Rightarrow$ $(y,x) \in R$
$(b,y) \in R$, $(y,x) \in R$ $\underset{\text{transitivitet}}{\Rightarrow}$ $(b,x) \in R$

Alltså $b \in [x]_R$

"$\Leftarrow$": Anta $[x]_R = [y]_R$. Reflexivitet $\Rightarrow$ $(x,x) \in R$
och därmed $x \in [x]_R = [y]_R$.

(ii) Anta $[x]_R \neq [y]_R$. Motantagande: $[x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset$.
Alltså existerar ett element
$a \in [x]_R \cap [y]_R$, d.v.s.
$a \in [x]_R$ och $a \in [y]_R$.

(i) $\Rightarrow$ $[x]_R = [a]_R = [y]_R$ ↯

Alltså: $[x]_R \cap [y]_R = \emptyset$

(iii) "$\subseteq$": Anta $y \in X$. Eftersom $y \in [y]_R$ p.g.a. reflexiviteten ($(y,y) \in R$) så gäller

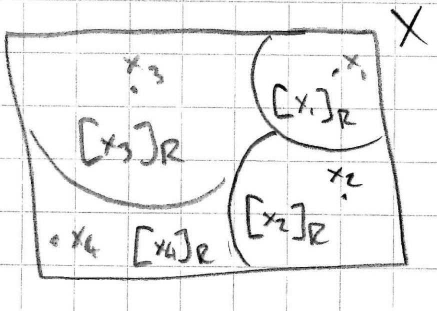
$$y \in \bigcup_{x \in X} [x]_R$$

"$\supseteq$": Anta $y \in \bigcup_{x \in X} [x]_R$. Då gäller $y \in [x]_R$ för något $x \in X$

D.v.s. $y \in \{\underline{a \in X} \mid (a,x) \in R\}$ och därmed $y \in X$.

$\square$

(ii) & (iii) säger att ekvivalensklasserna X/R utgör en <u>partition</u> av X i disjunkta mängder:



För en ekvivalensklass $[x]_R$ kallas x för en <u>representant</u> för klassen $[x]_R$

<u>Exempel 51</u>: Vi definierar relationen $\sim$ på mängden $\mathbb{Z}$ genom

$a \sim b$ om $a-b$ är delbart med 5.

Visa att $\sim$ är en ekvivalensrelation. Bestäm ekvivalensklasserna.

Reflexivitet: För alla $n \in \mathbb{Z}$ gäller $n-n=0$ och 0 är delbart med 5, alltså $n \sim n$.

Symmetri: Anta $a \sim b$, d.v.s. $a-b=5k$ för något $k \in \mathbb{Z}$. Då är $b-a=-(a-b)=-5k=5\cdot(-k)$. Nu $-k \in \mathbb{Z}$ och därmed är $b-a$ delbart med 5. Alltså $b \sim a$.

Transitivitet: Anta $a \sim b$ och $b \sim c$, d.v.s. $a-b=5k$ och $b-c=5k'$ för något $k \in \mathbb{Z}$ och $k' \in \mathbb{Z}$.

Då är
$$a-c=(a-b)+(b-c)=5k+5k' = 5(k+k')$$
Nu, $k+k' \in \mathbb{Z}$ och därmed är $a-c$ delbart med 5. Alltså $a \sim c$.

$\therefore \sim$ är en ekvivalensrelation.

Ekvivalensklasserna:
$$[0]_\sim = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \sim 0\}$$
$$= \{n \in \mathbb{Z} \mid n-0=5k \text{ för något } k \in \mathbb{Z}\}$$
$$= \{n \in \mathbb{Z} \mid n=5k \text{ för något } k \in \mathbb{Z}\}$$
$$= \{5k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

$$[1]_\sim = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \sim 1\}$$
$$= \{n \in \mathbb{Z} \mid n-1=5k \text{ för något } k \in \mathbb{Z}\}$$
$$= \{n \in \mathbb{Z} \mid n=5k+1 \text{ för något } k \in \mathbb{Z}\}$$
$$= \{5k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

Motsvarande får vi: $[2]_\sim = \{5k+2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$
$$[3]_\sim = \{5k+3 \mid k \in \mathbb{Z}\}$$
$$[4]_\sim = \{5k+4 \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

Vi noterar även: för varje $k \in \mathbb{Z}$ och $a \in \{0,1,2,3,4\}$

gäller $[a+5k]_\sim = [a]_\sim$

Orsak: $a+5k-a = 5k$ och därmed
$a+5k \sim a$, d.v.s. $a+5k \in [a]_\sim$

Sats 50 $\Rightarrow$ $[a+5k]_\sim = [a]_\sim$

Dvs $[0]_\sim = [5]_\sim = [10]_\sim = \cdots$

$[1]_\sim = [6]_\sim = [11]_\sim = \cdots$

$[2]_\sim = [7]_\sim = [12]_\sim = \cdots$

$[3]_\sim = [8]_\sim = [13]_\sim = \cdots$

$[4]_\sim = [9]_\sim = [14]_\sim = \cdots$

Således är $\mathbb{Z}/\sim = \{[n]_\sim \mid n \in \mathbb{Z}\}$

$= \{[0]_\sim, [1]_\sim, [2]_\sim, [3]_\sim, [4]_\sim\}$