

HU / Institutionen för matematik och statistik
Inledning till universitetsmatematik, hösten 2014
Övning 9

Lösningarna skall returneras senast ons 19.11.2014 kl 19.30
Korrigeringsarna skall returneras senast ons 3.12.2014 kl 19.30

Uppgiftsserie I

1. I följande forskningsenkät samlas info som används i forskningen av inlärning av matematik

www.cs.helsinki.fi/group/rage/jym2014/kysely3.html.

Svara gärna på enkäten. Den är dock på finska och således kan man kryssa uppgift ett gjord även om man inte svarar på enkäten.

Uppgiftsserie II

Följande uppgifter behandlar begreppen bild och Urbild. För att rita grafen av funktioner kan man använda t.ex. [Wolfram|Alpha](#).

2. Låt $V = [1, 4]$ och $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funktionen där

$$h(x) = \begin{cases} 2 - x, & \text{om } x < 2; \\ 0,5x + 1, & \text{om } x \geq 2. \end{cases}$$

Rita grafen till h i intervallet $[-3, 7]$ i ett koordinatsystem och bestäm med hjälp av grafen hV och $h^{-1}V$.

3. Låt $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto |x - 2| + 2$ och $A = [0, 3]$. Rita grafen till f i intervallet $[-1, 5]$ i ett koordinatsystem och bestäm med hjälp av grafen
(a) bilden fA (b) Urbilden $f^{-1}[fA]$ (c) Urbilden $f^{-1}A$ (d) bilden $f[f^{-1}A]$.

4. Anta, att $f: X \rightarrow Y$ är en avbildning och $A \subset X$. Bevisa eller motbevisa följande påståenden:

(a) $A \subset f^{-1}[fA]$

(b) $f^{-1}[fA] \subset A$.

Uppgiftsserie III

I följande uppgifter övar vi på den andra induktionsprincipen.

5. Vi definierar en heltalsföljd (a_0, a_1, a_2, \dots) rekursivt genom $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ och $a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1}$, då $n \geq 1$. Visa med den andra induktionsprincipen att $a_n = n + 1$ för alla $n \in \mathbb{N}$.

Uppgiftsserie IV

Följande uppgifter behandlar avbildningar.

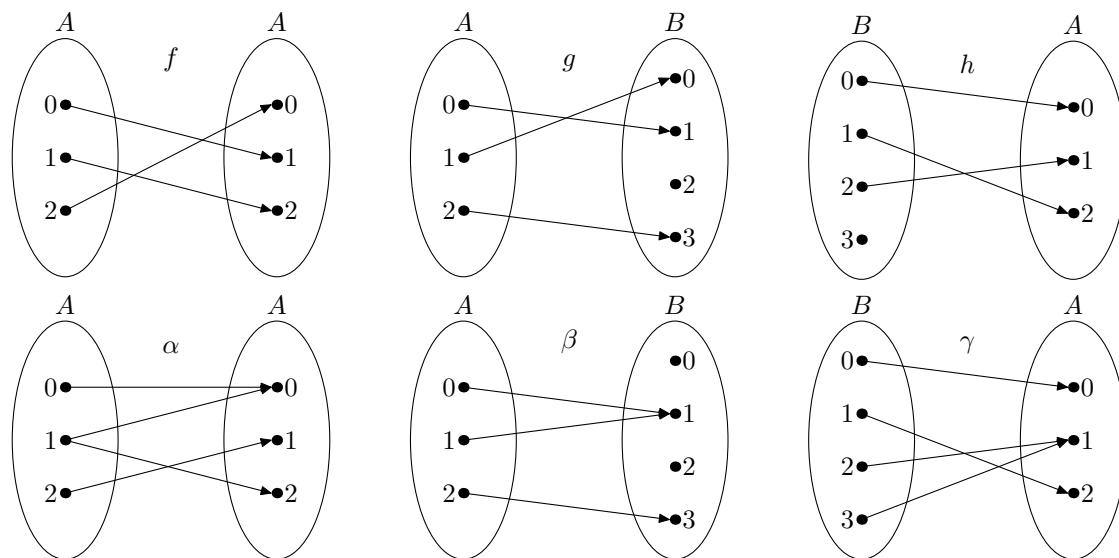
6. Låt $a, b \in \mathbb{Z}$ där $b \neq 0$. Är följande regler avbildningar $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$?

(a) $\frac{a}{b} \mapsto \frac{a+b}{a^2+b^2}$

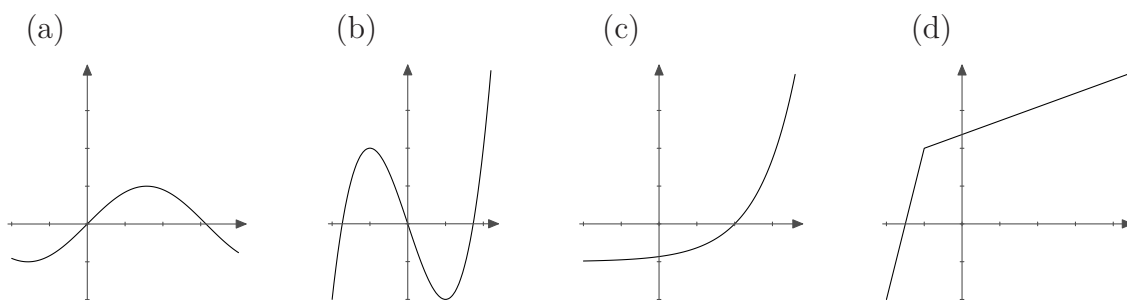
(b) $\frac{a}{b} \mapsto \frac{5a}{b}$

(c) $\frac{a}{b} \mapsto \frac{3a^2+b^2}{b^2}$.

7. Vilka av reglerna nedan gestaltar en avbildning? Vilka är injektioner? Vilka är surjektioner?



8. Bilderna nedan gestaltar grafer till olika funktioner. Målmängderna kan läsas från x-axeln och målmängden till alla funktioner är $[-2, 4]$. Vilka av funktionerna är injektioner? Vilka är surjektioner?



Uppgiftsserie V

Följande uppgifter behandlar begreppen injektion och surjektion.

★ 9. Är följande avbildningar injektioner?

(a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2 - 0,25x$.

(b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + 3$.

★ 10. Är avbildningarna i uppgift 9 surjektioner?

Välj en av följande uppgiftsserier. Du får dock göra alla uppgifter om du vill.

Komplexa tal

11. (a) Bilda med hjälp av "nollregeln för en produkt" (d.v.s. $ab = 0$ om och endast om $a = 0$ eller $b = 0$ för $a, b \in \mathbb{C}$) en andragsradsekvation med reella koefficienter som har lösningarna

i. 3 och -5

ii. $1 - i$ och $1 + i$.

- (b) Bestäm de reella talen b och c , för vilka en lösning till $x^2 + bx + c = 0$ är $2 + i$.
Tips: insättning.

12. Lös den komplexa ekvationen

(a) $9x^2 + 5 = 6x$

(b) $2x^2 - 4x + 40 = x^2 + 2x - 18$.

13. Vad är fel med följande resonemang:

$$-7 = 7i^2 = (i\sqrt{7})^2 = i\sqrt{7} \cdot i\sqrt{7} = \sqrt{-7}\sqrt{-7} = \sqrt{(-7) \cdot (-7)} = \sqrt{49} = 7 \quad ?$$

Matematik för datavetenskap och statistik

14. Beräkna samt skriv ut som motivering motsvarande ekvation med divisionsrest:

(a) $13 \bmod 3$ (b) $155 \bmod 9$ (c) $-97 \bmod 11$ (d) $-221 \bmod 23$.

15. Låt $X = \{0, 1, 2, \dots, 28\}$.

- (a) Kryptera meddelandet PER ASPERA AD ASTRA genom funktionen $f: X \rightarrow X$, $f(n) = (11n + 2) \bmod 29$. Ändra bokstäverna först till tal så att bokstaven A motsvarar talet 0, bokstaven B talet 1, bokstaven C talet 2 usw. (se tabellen nedan). Efter detta gör krypteringen genom att ändra talen med funktionen f . Därefter ändra talen igen till bokstäver och krypteringen är färdig.
- (b) Meddelandet AÖ NO DI YG ÖI OÖ är bildat genom en enklare funktion för krypteringen, nämligen $g: X \rightarrow X$, $g(n) = (n + 24) \bmod 29$. Dekryptera meddelandet. Vad sägs i det ursprungliga meddelandet?

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	Å	Ä	Ö	
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	

16. Talföljden (b_0, b_1, b_2, \dots) är *aritmetisk*, om differensen av två på varandra följande tal är konstant; dvs. om det existerar ett tal $d \in \mathbb{R}$, så att för alla $n \in \mathbb{N}$ gäller $b_{n+1} - b_n = d$.

Vi betraktar talföljden (a_n) , som är definierad rekursivt genom $a_0 = 2$ och $a_{n+1} = 3a_n$ för alla $n \in \mathbb{N}$.

- (a) Är talföljden (a_n) aritmetisk? Är talföljden (a_n) geometrisk?
- (b) Visa att logaritmen med basen 2 av talen i följden (a_n) bildar en aritmetisk talföljd; dvs. visa att följden $(\log_2(a_n))$ aritmetisk.

Tips: logaritmens räkneregler i b-delen.