

HU / Institutionen för matematik och statistik  
Inledning till universitetsmatematik, hösten 2014  
Övning 8

Lösningarna skall returneras senast ons 12.11.2014 kl 19.30  
Korrigeringarna skall returneras senast ons 26.11.2014 kl 19.30

Uppgiftsserie I

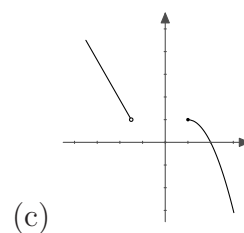
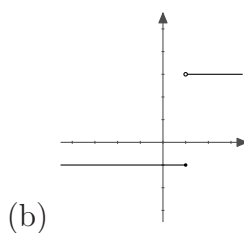
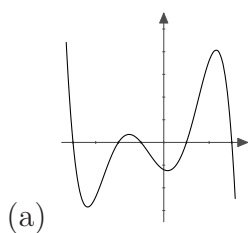
1. I följande forskningsenkät angående Inledning till universitetsmatematik samlas info som används i forskningen av inläring av matematik:

[www.cs.helsinki.fi/group/rage/jym2014/kysely2.html](http://www.cs.helsinki.fi/group/rage/jym2014/kysely2.html).

Svara gärna på enkäten. Den är dock på finska och således kan man kryssa uppgift 1 gjord även om man inte svarar på enkäten.

Uppgiftsserie II

2. Motivera, vilka av följande bilder gestaltar en avbildning  $[-4, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ .



3. (a) Låt  $X = \{1, 2\}$ . Bestäm alla avbildningar  $X \rightarrow X$ .  
(b) Låt  $Y = \{1, 2, 3\}$ . Hur många avbildningar  $Y \rightarrow Y$  finns det?

- ★ 4. Låt  $X = \{0, 1, 2, 3\}$ . Är följande regler avbildningar?

- (a)  $f: X \rightarrow X$ ,  $f(n) = n^2 + n \cdot (-1)^{n+1}$       (b)  $g: X \rightarrow X$ ,  $g(x) = 3$   
(c)  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = \sqrt{x-3}$       (d)  $\tau: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ ,  $\tau\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{2a-b}{a^2+2b^2}$ .

Uppgiftsserie III

5. Vi betraktar funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 5 - (x-3)^2$ . Låt  $U = [1, 4]$ .
- (a) Rita grafen till  $f$ . Du kan använda exempelvis [Wolfram|Alpha](http://www.wolframalpha.com).  
(b) Bestäm  $fU$  med hjälp av grafen till  $f$ . Märk ut  $U$  och  $fU$  i bilden.  
(c) Bestäm  $f^{-1}U$  med hjälp av grafen till  $f$ . Märk ut  $U$  och  $f^{-1}U$  i bilden.
6. Vi betraktar avbildningen  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ , där  $n \mapsto |n-2| - 1$ . Låt  $A = \{0, 1, 2\}$  och  $B = \{-3, -2\}$ . Bestäm
- (a)  $fA$       (b)  $fB$       (c)  $f^{-1}A$       (d)  $f^{-1}B$ . Motivera!

## Uppgiftsserie IV

7. Låt  $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  och  $f: \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$ ,  $f(X) = A \setminus X$ . Bestäm

(a)  $f(\{1, 5\})$       (b)  $f(A)$       (c)  $f(\emptyset)$       (d)  $f\{\{1, 3, 5\}, \{0, 4\}\}$       (e)  $f\emptyset$ .

★ 8. Låt  $X = \{4, 7, \{4, 7\}\}$  och  $Y = \{4, 7, 10, 28\}$ . Vi bestämmer regeln  $f$  genom

$$4 \mapsto 7, \quad 7 \mapsto 10 \quad \text{ja} \quad \{4, 7\} \mapsto 28.$$

(a) Motivera att  $f$  är en avbildning  $X \rightarrow Y$ .

(b) Låt  $A = \{4, 7\}$ . Bestäm  $f(A)$ ,  $fA$  och  $f^{\leftarrow}A$ . Vad heter dessa begrepp.

## Uppgiftsserie V

I uppgifterna 9–10 antar vi att  $f: X \rightarrow Y$  är en avbildning,  $A, B \subset X$  och  $V, W \subset Y$ .

9. (a) Visa att  $f[A \cap B] \subset fA \cap fB$ .

(b) Visa med ett motexempel att inklusionen åt andra hållet inte gäller allmänt.

10. Bevisa eller motbevisa följande påstående:  $f^{\leftarrow}[V \cup W] = f^{\leftarrow}V \cup f^{\leftarrow}W$ .

Välj en av följande uppgiftsserier. Du får dock göra alla uppgifter om du vill.

## Komplexa tal

11. Bestäm modulen, argumentet, realdelen samt imaginärdelen till  $z$  då

(a)  $z = (\sqrt{2} - i\sqrt{2})^{10}$       (b)  $z = (4 - 4i)^8(3i - 3\sqrt{3})^3(2\sqrt{3} + 6i)^{-10}$ .

12. Punkten  $(\sqrt{3}, 1)$  roterar runt origo i positiv riktning  $210^\circ$  och dess avstånd till origo växer 150 %. Bestäm med hjälp av komplexa tal punktens nya koordinater.

★ 13. Låt  $z_1 = 4e^{i\pi}$ ,  $z_2 = 2e^{i\frac{3\pi}{2}}$  och  $z_3 = -6e^{i\frac{5\pi}{4}}$ . Bestäm modulen, argumentet, realdelen samt imaginärdelen till talen:

(a)  $z_1z_2$       (b)  $\frac{z_1}{z_2}$       (c)  $z_3$       (d)  $\frac{z_2z_3}{z_1}$ .

## Matematik för datavetenskap och statistik

14. Bestäm följande logaritmer eller deras närmevärden genom division:

(a)  $\log_2 512$       (b)  $\log_2 80$       (c)  $\log_3 600$       (d)  $\log_{10} 11\,000$ .

15. Lös följande ekvationer genom att använda definitionen av logaritmen:

(a)  $\log_2(x) = 7$       (b)  $\log_2(x) = 3,5$       (c)  $2^x = 200$       (d)  $2^{3x-1} = 80$ .

★ 16. Anta att  $a \in \mathbb{R}$  och  $a > 1$ . Hur stor tillväxt får logaritmen med basen 2 av talet  $a$  då talet  $a$

- (a) har en 16-faldig tillväxt      (b) har en 1024-faldig tillväxt  
(c) höjs med potensen 4      (d) höjs med potensen 10.

Vihje: t.ex. i a-delen är det meningen att jämföra talen  $\log_2(a)$  och  $\log_2(16a)$ .