HU / Institutionen för matematik och statistik
Inledning till universitetsmatematik, hösten 2014
Övning 7

Lösningarna skall returneras senast ons 5.11.2014 kl 19.30
Korrigeringarna skall returneras senast ons 19.11.2014 kl 19.30

Uppgiftsserie I

1. I följande forskningsenkät samlas info som används i forskningen av inlärning av matematik

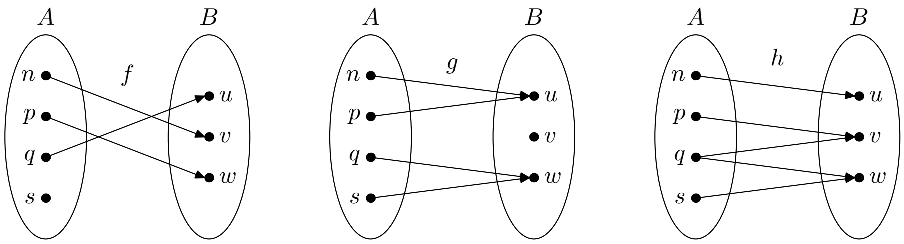
   www.cs.helsinki.fi/group/rage/jym2014/kysely1.html.

   Svara gärna på enkäten. Den är dock på finska och således kan man kryssa uppgift 1 gjord även om man inte svarar på enkäten.

Uppgiftsserie II

Följande uppgifter behandlar avbildningar.

2. Är följande regler f, g och h avbildningar $A \to B$?



3. Låt $A = \{0, 1, 2, 3\}$ och $B = A \setminus \{3\}$. Vi definierar reglerna f, g och h genom

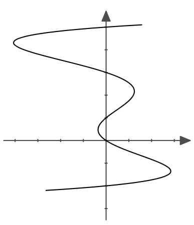
$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{om } x \leq 1; \\ x, & \text{jos } x \geq 1, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x/2, & \text{om } x = 2n \text{ för något } n \in \mathbb{Z}; \\ (x-1)/2, & \text{om } x = 2n+1 \text{ för något } n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

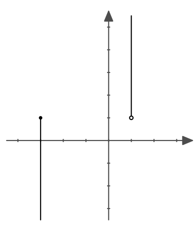
   och $h(x) = 2x$. Är f en avbildning $A \to A$? Är g en avbildning $A \to B$? Är h en avbildning $B \to B$?

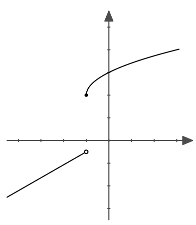
4. Åskådliggör förra uppgiftens regler f, g och h

   (a) med motsvarande diagram som i uppgift 2. (b) i ett koordinatsystem.

5. Motivera, vilka av följande diagram bestämmer en avbildning $[-4, 3] \to \mathbb{R}$.

(a)


(b)


(c)


6. Låt $X = \{0,1,2,3\}$, $A = \{0,2,3\}$ och $Y = \{-1,2,3,4,7\}$. Vilka av följande avbildningar är identiska?

$$f_1 \colon X \to Y,\ x \mapsto -x^2 + 4x - 1 \qquad f_4 \colon A \to Y,\ x \mapsto -x^2 + 4x - 1$$

$$f_2 \colon X \to Y,\ x \mapsto x^3 - 6x^2 + 10x - 1 \qquad f_5 \colon A \to Y,\ x \mapsto x^3 - 6x^2 + 10x - 1$$

$$f_3 \colon X \to Y,\ x \mapsto 3 - (x-2)^2 \qquad f_6 \colon A \to Y,\ 0 \mapsto -1\,,\ 2 \mapsto 3\,,\ 3 \mapsto 2\,.$$

Uppgiftsserie III

Kom ihåg att den symmetriska differensen av mängderna A och B definieras på följande sätt: $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. I följande uppgifter är A, B och C mängder.

7. Visa genom indirekt härledning att om $A \cap C = B \cap C$, så gäller $(A \triangle B) \cap C = \emptyset$.

8. Visa, att om $(A \triangle B) \cap C = \emptyset$, så gäller $A \cap C = B \cap C$.

★ 9. Formulera resultatet som uppgifterna 7–8 tillsammans ger på ett matematiskt sätt.

Uppgiftsserie IV

I följande uppgifter övar vi på olika bevistekniker.

★ 10. Anta att A och B är mängder. Visa, att om $A \setminus B = B$, så gäller $A \cup B = \emptyset$. Använd indirekt härledning.

11. Anta, att A, B, C och D är mängder. Vi betraktar påståendet

”om $A \times B \subset C \times D$, så gäller $A \subset C$”.

(a) Visa genom att ge ett motexempel, att påståendet inte gäller för alla mängder A, B, C och D.

(b) Formulera ett sådant tilläggsantagande för mängden B att med detta antagande gäller påståendet för alla mängder A, B, C och D. Motivera.

Välj en av följande uppgiftsserier. Du får dock göra alla uppgifter om du vill.

Komplexa tal

12. En person hittade en skattkarta (se följande sida). I mitten av kartan finns en damm som omringas ovanför realaxeln av ett träsk och under realaxeln av en åker. Det står på baksidan av kartan att den skall tolkas som det komplexa planet och att det finns en skatt i punkten

$$z = \Big(1{,}15\cos(2\pi/5) + 1{,}15i\sin(2\pi/5)\Big)^{11}.$$

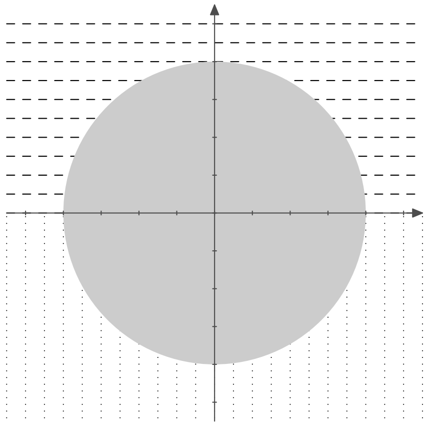
(a) Ta reda på ifall skatten finns i träsket, dammen eller på åkern. Vilka skulle skattens koordinater vara i ett vanligt koordinatsystem? Du kan ge svaret som ett närmevärde.

(b) Engligt meddelandet så tappade Abraham de Moivre sin ring i punkten

$$(0{,}88 - 0{,}88i)^6$$

då han letade efter skatten. Finns

ringen i träsket, dammen eller i åkern? Var lönar det sig att börja leta efter ringen?



13. Anta, att $\theta \in \mathbb{R}$. Låt $z = \cos\theta + i\sin\theta$.

    (a) Skriv $z^2 = (\cos\theta + i\sin\theta)^2$ i formen $x + yi$.

    (b) Skriv talet z^4 på två sätt: genom att använda de Moivres formel och genom att utföra multiplikationen $z^4 = z^2 \cdot z^2$ på vanligt sätt. Kan du utgående från dessa två framställningar uttrycka $\cos 4\theta$ och $\sin 4\theta$ genom $\cos\theta$ och $\sin\theta$.

14. (a) Märk ut följande tal i det komplexa planet:

$$z_1 = 3e^{\pi i}, \qquad z_2 = 2e^{\frac{3\pi}{4}i}, \qquad z_3 = e^{\frac{\pi}{2}i}, \qquad z_4 = 4e^{\frac{7\pi}{4}i},$$
$$z_5 = \pi e^{4\pi i}, \qquad z_6 = \frac{3}{2}e^{\frac{3\pi}{2}i}, \qquad z_7 = 2\sqrt{3}e^{\frac{7\pi}{6}i}, \qquad z_8 = 3e^{-\frac{2\pi}{3}i}.$$

    (b) Skriv talen i a-delen i formen $a + bi$, där $a,\ b \in \mathbb{R}$.

Matematik för datavetenskap och statistik

15. Studerandena planerade en kryssning via Gdańsk, St. Petersburg, Riga, Rostock, Tallinn och Stockholm.

    (a) Hur många olika kryssningar kan man göra genom att ändra på ordningen på städerna?

    (b) En studerande skulle vilja till Göteborg istället för Stockholm och en annan till Szczec istället för Gdańsk. På hur många sätt kunde man välja sex kryssningsstäder utifrån tolv hamnstäder?

16. Postfacksprincipen (Pigeonhole principle) säger följande: om man har fler brev än postfack kommer något postfack att innehålla minst två brev, om man lägger varje brev i något av postfacken.

    Lös följande problem genom att använda postfacksprincipen.

    (a) En grupp studeranden beslöt att fara till föregående uppgifts sex universitetsstäder på utbyte. Hur många sutderanden måste fara på utbyte så att det finns med säkerhet åtminstone två utbytesstuderanden i någon stad?

    (b) Studeranden har åtta dagar på sig att göra 17 övningsuppgifter. Om man gör alla uppgifter gör man då med säkerhet åtminstone fem uppgifter någon dag? Gör man med säkerhet åtminstone tre uppgifter någon dag?

17. (a) Bestäm koefficienten framför x^9y^8 i polynomet $(x+y)^{17}$.

(b) Beräkna summan

$$\sum_{k=0}^{n} 3^k \binom{n}{k}$$

då $n=1$ och $n=2$.

(c) Visa att för alla $n \in \mathbb{N}$ gäller

$$\sum_{k=0}^{n} 3^k \binom{n}{k} = 4^n.$$