HU / Institutionen för matematik och statistik
Inledning till universitetsmatematik, hösten 2014
Övning 6

Lösningarna skall returneras senast ons 15.10.2014 kl 19.30
Korrigeringarna skall returneras senast ons 5.11.2014 kl 19.30

Uppgiftsserie I

Följande uppgifter behandlar potensmängder.

1. Bestäm följande potensmängder:

   (a) $\mathcal{P}(\{\pi\})$ (b) $\mathcal{P}(\emptyset)$ (c) $\mathcal{P}(\{\emptyset\})$ (d) $\mathcal{P}(\{3^3, 4^4, 5^5\})$ (e) $\mathcal{P}\Big(\mathcal{P}(\{\emptyset\})\Big)$.

2. Gäller likheten $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ för alla mängder A och B?

3. Anta, att A är en mängd.
   (a) Visa, att om $A \subset \mathcal{P}(A)$ så gäller $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$.
   (b) Ge ett exempel på en mängd A, för vilken $A \not\subset \mathcal{P}(A)$.
   (c) Ge ett exempel på en mängd A, för vilken $A \subset \mathcal{P}(A)$.

Uppgiftsserie II

I följande uppgifter övar vi på olika bevistekniker.

4. Fibonaccitalen definieras rekursivt genom $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ och $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ för alla naturliga tal $n \geq 2$.
   (a) Bestäm $F_2, \ldots, F_8$.
   (b) Beräkna summan $\sum_{i=0}^{3} F_{2i+1}$.
   (c) Visa med induktion, att för varje $n \in \mathbb{N}$ gäller $\sum_{i=0}^{n} F_{2i+1} = F_{2n+2}$.

5. Gäller påståendet ”om $A \cap C = B \cap C$, så gäller $A = B$” för alla mängder A, B och C?

★ 6. Gäller påståendet ”$A \cup C \subset B \cup C$, om och endast om $A \setminus C \subset B \setminus C$” för alla mängder A, B och C?

Uppgiftsserie III

I följande uppgifter övar vi på bl.a. indirekt bevisföring.

Mängden av alla jämna heltal är $\{z \in \mathbb{Z} \mid z = 2k \text{ där } k \in \mathbb{Z}\}$ och mängden av alla udda heltal är $\{z \in \mathbb{Z} \mid z = 2k + 1 \text{ där } k \in \mathbb{Z}\}$.

7. Anta, att $n \in \mathbb{Z}$. Visa genom indirekt härledning (d.v.s. genom att göra ett motantagande) att om $3n + 2$ är ett udda heltal, så är även n udda.

8. Anta, att $n \in \mathbb{Z}$. Visa att n är ett jämnt heltal om och endast om n^3 är ett jämnt heltal.

Uppgiftsserie IV

Följande uppgifter betraktar komplementet, potensmängden och kartesiska produkten.

9. Vi betraktar delmängden $A = \{3, 7, 9, 0\}$ till mängden $\mathbb{N}$. Är följande påståenden sanna?

   (a) $\emptyset \in A$ (b) $-2 \in \complement A$ (c) $(9, 1) \in \mathbb{N} \times A$ (d) $\{7, 9\} \in \mathcal{P}(A)$

   (e) $4 \in \complement A$ (f) $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ (g) $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N} \times A)$ (h) $\{\{3\}\} \in \mathcal{P}(A)$.

Kom ihåg att om a och b är reella tal, så är $[a, b] = \{\, x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \,\}$. Om X är en mängd så betecknar X^2 den kartesiska produkten $X \times X$.

10. Låt $A = [0, 5]$, $B = [1, 4]$ och $C = [2, 3]$. Rita i ett koordinatsystem följande mängder:

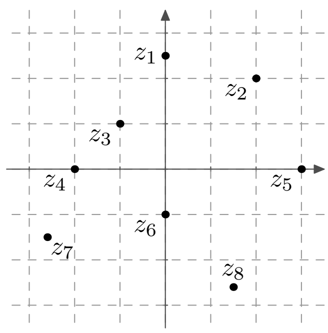
    (a) $A^2 \setminus B^2$ (b) $(A \setminus B)^2$ (c) $B^2 \setminus C^2$ (d) $A^2 \setminus (B^2 \setminus C^2)$ (e) $\big(A \setminus (B \setminus C)\big)^2$.

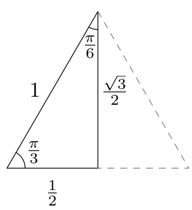
Välj en av följande uppgiftsserier. Du får dock göra båda om du vill.

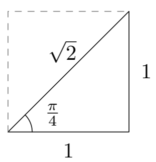
Komplexa tal

11. Brevidliggande bild föreställer det komplexa planet där sidolängden av en ruta är 1. Vi vet att $z_7 = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$ och $z_8 = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$. Skriv de komplexa talen i bilden i polär form.

    Du kan använda dig av minnestrianglarna:







★ 12. (a) Märk ut följande komplexa tal i det komplexa planet och bestäm deras real- samt imaginärdel:

$$z = 3\cos(3\pi/4) + 3i\sin(3\pi/4) \qquad w = 4\cos(-5\pi/6) + 4i\sin(-5\pi/6)$$

(b) Skriv följande komplexa tal i polär form:

$$z = 3 - 3i \qquad w = 3i - \sqrt{3}$$

13. Bestäm modulen, argumentet och real- samt imaginärdelen av följande komplexa tal:

$$\text{(a)}\ 3\Big(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\Big) \cdot 4\Big(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\Big) \qquad \text{(b)}\ \frac{2\Big(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\Big)}{5\Big(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\Big)}.$$

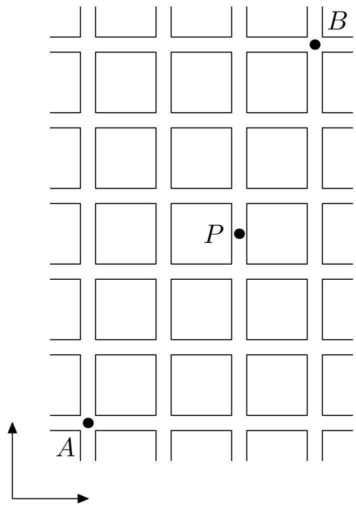
Matematik för datavetenskap och statistik

14. Vi betraktar bitföljder med åtta tal såsom exempelvis 00110101. I hur många sådana följder finns

(a) exakt tre ettor? (b) åtminstone en nolla?

(c) högst en nolla? (d) lika många nollor och ettor?

15. Brevidliggande bild föreställer kvarter i Kamppen mellan Albertsgatan-Georgsgatan och Sjömansgatan-Lönnrotsgatan.



Matematikern Robert Fredrikson går varje vardag från sitt hem vid hörnet av Sjömansgatan och Albertsgatan (punkt A) till hörnet av Gamla kyrkoparken (punkt B).

(a) Anta, att Robert går alltid längs gator som ses i bilden och alltid i nåndera riktning som pilarna indikerar. Hur många olika gångrutter kan han ta från punkt A till punkt B?

(b) Anta, att Robert far via posten vid punkt P varje gång. Hur många olika gångrutter kan han i sådant fall ta?
(Tips i nedre kanten[1])

⋆ 16. På en arbetsplats har sex män och nio kvinnor ultimate som hobby. På hur många olika sätt kan man bilda ett sjupersoners lag ifall

(a) det inte spelar roll vilket kön lagets medlemmar har?

(b) laget måste ha åtminstone en kvinna?

(c) laget måste ha åtminstone en man?

(d) laget måste bestå av åtminstone tre kvinnor och åtminstone två män?

[1]Tips: Beskriv Roberts gångrutt med en bitföljd.