HU / Institutionen för matematik och statistik
Inledning till universitetsmatematik, hösten 2014
Övning 5

Lösningarna skall returneras senast ons 8.10.2014 kl 19.30
Korrigeringarna skall returneras senast ons 29.10.2014 kl 19.30

Uppgiftsserie I

1. Bestäm den kartesiska produkten $A \times B$, då

   (a) $A = \{1, 4, 2\}$ och $B = \{3, 1, 4\}$ (b) $A = \{1\}$ och $B = \mathbb{N}$

   (c) $A = \{a \in \mathbb{Z} : |a| < 2\}$ och $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 4\}$ (d) $A = \mathbb{Z}$ och $B = \emptyset$.

Anta, att J är en mängd och för varje $j \in J$ är en mängd A_j given. Då är unionen och snittet av mängderna A_j

$$\bigcup_{j \in J} A_j = \{x \mid x \in A_j \text{ för något } j \in J\} \quad \text{och} \quad \bigcap_{j \in J} A_j = \{x \mid x \in A_j \text{ för alla } j \in J\}.$$

2. Låt $A_n = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq n\}$ för varje $n \in \mathbb{N}$. Bestäm

   (a) mängderna A_0, A_1 och A_6 (b) unionen $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ (c) snittet $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Uppgiftsserie II

3. Är likheten $(A \times B) \smallsetminus C = (A \smallsetminus C) \times (B \smallsetminus C)$

   (a) sann för alla mängder A, B och C?

   (b) falsk för alla mängder A, B och C?

   Kom ihåg att motivera dina svar.

4. Anta, att A, B och C är mängder. Visa, att $A \times (B \smallsetminus C) = (A \times B) \smallsetminus (A \times C)$.

Uppgiftsserie III

5. Bevisa med induktion Bernoullis olikhet: om $x \in \mathbb{R}$ och $x > -1$, så $(1+x)^n \geq 1+nx$ för alla $n \in \mathbb{N}$. Var i beviset behöver du antagandet att $x > -1$?

6. Anta, att A och B är mängder. Visa att

$$(A \smallsetminus B) \cup (B \smallsetminus A) = (A \cup B) \smallsetminus (A \cap B).$$

7. Anta, att a, $b \in \mathbb{R}$ och $a \neq b$. Visa, att $(a+1)^2 = (b+1)^2$, om och endast om $a + b = -2$.

   Hjälp: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

★ 8. Är påståendet ”om $A \cup B = B$, så $A \cap B = A$” sant för alla mängder A och B?

Uppgiftsserie IV

Uppgifterna 9–10 handlar om delmängderna $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 2\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 5 \text{ och } -1 \leq y \leq 3\}$ och $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 9\}$ till produktmängden $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

9. Åskådliggör i ett koordinatsystem mängderna A, B och C.

   Hjälp: cirkelns ekvation $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$.

10. Åskådliggör i ett koordinatsystem mängderna $(A \cap B) \cup C$, $(A \smallsetminus B) \cap C$ ja $A \smallsetminus (B \smallsetminus C)$.

Välj en av följande uppgiftsserier. Du får dock göra båda om du vill.

Komplexa tal

11. Lös den komplexa ekvationen $2z + i\bar{z} = 3i$.

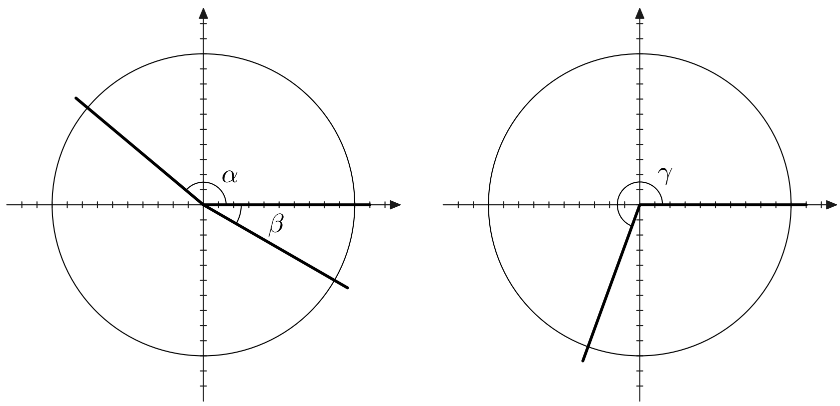
    Tips: i ekvationen förekommer både z och $\bar{z}$. Således lönar det sig att beteckna $z = x + yi$ och därefter lösa x och y. Kan du i uppgiften utnyttja kursen Linjäralgebra och matrisräkning I?

12. (a) Anta, att $z \in \mathbb{C}$. Visa med induktion att $|z^n| = |z|^n$ för alla naturliga tal $n \geq 1$.

    (b) Bestäm modulen av följande komplexa tal:

    i. $(6\sqrt{2} + 7i)^{-1}\left(\dfrac{3}{5} - \dfrac{4}{5}i\right)^{2014}$ ii. $\dfrac{(1 + 3i)^{365}}{(\sqrt{6} - 2i)^{363}}$.

★ 13. (a) Bestäm närmevärden till sinus och cosinus av vinklarna α, β och γ som är ritade i enhetscirkeln:



(b) Vilka av följande komplexa tal z_1, z_2 och z_3 är skrivna i polär form?

$$z_1 = 5\big(\sin(\pi/7) + i\cos(\pi/7)\big) \qquad z_2 = \cos(\pi/9) + i\sin(\pi/9)$$

$$z_3 = -3\big(\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2)\big)$$

Matematik för datavetenskap och statistik

14. I början av höstterminen år 2010 har ett litet universitet 500 studeranden. Varje vår utexamineras 10 % av studerandena och till varje hösttermin kommer 80 nya studeranden i tillägg till de gamla. Vi betraktar talföljden (a_n), där för varje $n = 0, 1, 2, \ldots$ betecknar talet a_n antalet studeranden i början av höstterminen året $n + 2010$.

    (a) Bilda en rekursionsekvation som visar hur talet a_{n+1} beror på talet a_n. Vad är a_0?

    (b) Visa med induktion att för alla naturliga tal $n \geq 1$ gäller

    $$a_n = a_0 q^n + \sum_{j=0}^{n-1} bq^j,$$

    där $b = 80$ och $q = 0{,}9$.

★ 15. Fortsättning till uppgift 14.

    (a) Använd resultatet till uppgift 14 b) och beräkna antalet studeranden år 2030.

    (b) Om situationen fortsätter på samma sätt, växer antalet studeranden obegränsat eller kommer antalet studeranden att nå ett balanserat tillstånd där antalet är ungefär konstant år efter år? I så fall, vilken är konstanten?

Låt $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ och $k \in \mathbb{N}$. Vi betecknar med $\binom{n}{k}$ antalet delmängder till mängden $\{1, 2, \ldots, n\}$ med k element.

16. (a) Förklara vad som menas med beteckningen $\binom{29}{20}$ och räkna dess värde med hjälp av räknare eller dator[1].

    (b) Det finska alfabetet har 9 vokaler och 20 konsonanter. Mängden med alla konsonanter har alltså 20 element. Hur många ytterligare mängder med 20 bokstäver kan man bilda från alfabetets bokstäver?

    (c) Föreläsaren konstruerade repetitionsuppgifter med 29 påståenden som antingen är sanna (T) eller falska (E). Nio av påståendena är sanna. Hur många olika rätta svarsrader är det möjligt att bilda genom att ändra på ordningen av påståendena?

[1] Med räknare behöver du knappen nCr och t.ex. Wolfram Alpha förstår beteckningen nCr(29,20).