HU / Institutionen för matematik och statistik
Inledning till universitetsmatematik, hösten 2014
Övning 4

Lösningarna skall returneras senast ons 1.10.2014 kl 19.30
Korrigeringarna skall returneras senast ons 15.10.2014 kl 19.30

Uppgiftsserie I

I följande uppgifter betraktar vi först komplementbegreppet och därefter unionen och snittet av flera mängder. Exakta motiveringar behöver man ej ge i lösningarna.

1. Anta, att X är en mängd och $A \subset X$.

   (a) Anta, att $X = \{z \in \mathbb{Z} \mid z^2 \leq 36\}$ och $A = \{x \in X \mid x = 2k \text{ där } k \in \mathbb{N}\}$. Bestäm $\complement A$.

   (b) Anta, att $A = \{-7, -3, 1, 4, 5, 8\}$ och $\complement A = \{-5, 0, 3, 6, 7\}$. Bestäm X.

   (c) Anta, att $X = \{3n + 1 \mid 2 \leq n \leq 9\}$ och $\complement A = \{10, 16, 25\}$. Bestäm A.

Anta, att J är en mängd och för varje $j \in J$ är en mängd A_j given. Då är unionen och snittet av mängderna A_j

$$\bigcup_{j \in J} A_j = \{x \mid x \in A_j \text{ för något } j \in J\} \quad \text{och} \quad \bigcap_{j \in J} A_j = \{x \mid x \in A_j \text{ för alla } j \in J\}.$$

(i en sådan situation kallas J för en indexmängd)

2. Låt $J = \{1, 2, 3\}$ och $A_j = \{j, j + 2, 2j - 1, j^2 - j\}$ för alla $j \in J$. Bestäm

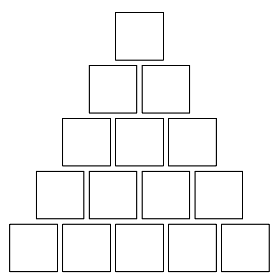
   (a) mängderna A_j (b) unionen $\bigcup_{j \in J} A_j$ (c) snittet $\bigcap_{j \in J} A_j$.

Uppgiftsserie II

I följande uppgifter övar vi bland annat på induktionsbevis.

3. Vi betraktar påståendet: $n^2 + 9 > 6n$ för alla $n \in \mathbb{N}$. Visa med induktion att påståendet är sant, eller motivera varför det är falskt.

4. En köpman köpte kubformade vattenmeloner från Japan och bestämde sig för att bilda ett torn av dem i fruktavdelningen. Toppen av tornet bestod av en melon, näst högsta nivån bestod av $2 \cdot 2 = 4$ meloner, därefter $3 \cdot 3 = 9$ meloner osv.. Bilden bredvid föreställer en sidoprofil av tornet.



   (a) Hur många vattenmeloner finns i tornet om den har 10 nivåer?

   (b) Anta, att $n \in \mathbb{N}$. Visa med induktion, att ifall tornet har n nivåer, så är antalet vattenmeloner i tornet
$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Uppgiftsserie III

I följande uppgifter övar vi på att bevisa påståenden av typen ”om ..., så ...” och att visa att sådana påståenden är falska genom motexempel.

5. Bevisa följande påståenden eller visa att de är falska:

   (a) Om $m \in \mathbb{Z}$ och $n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{-1, 0\}$, så $\dfrac{m+1}{n+1} > \dfrac{m}{n}$.

   (b) Om $a,\ b \in \mathbb{R}$, så $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

6. Anta, att $a,\ b \in \mathbb{R}$. Visa att om $a > 1$ och $3a + 2b \leq 5$, så $b < 1$.

7. Anta, att för mängderna A, B och C gäller $(A \smallsetminus B) \cap C = \emptyset$. Visa att om $x \in A \cap C$, så $x \in B$.

Uppgiftsserie IV

8. Anta att X är en mängd. Visa att för dess delmängder A och B gäller

$$\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B\,.$$

9. Stämmer det att $(A \smallsetminus B) \cup (A \smallsetminus C) = A \smallsetminus (B \cap C)$ för alla mängder A, B och C?

★ 10. Anta, att A, B och C är mängder. Visa att $(A \cup B) \smallsetminus C \subset A \cup (B \smallsetminus C)$.

Välj en av följande uppgiftsserier. Du får dock göra båda om du vill.

Komplexa tal

11. Lös den komplexa ekvationen $3z - 4i = i(2z + 5i)$.

12. Bestäm modulen av följande komplexa tal:

   (a) $-4i(7+i)(i-1)$ (b) $\dfrac{6-9i}{3+2i}$ (c) $\dfrac{3+7i}{2i-4} \cdot \dfrac{8-6i}{2+5i}$

★ 13. Anta att $z,\ w \in \mathbb{C}$.

   (a) Visa att $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$.

   (b) Anta i tillägg, att $w \neq 0$. Visa att

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}\,.$$

Matematik för datavetenskap och statistik

14. Räkna de fem första elementen i den rekursivt definierade talföljden (a_n) och undersök ifall talföljden är geometrisk då

    (a) $a_0 = 1,\ a_1 = 1$ och $a_n = na_{n-1} + n^2 a_{n-2}$ för alla naturliga tal $n \geq 2$.

    (b) $a_0 = 5$ och $a_n = na_{n-1}$ för alla $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

    (c) $a_0 = 2$ och $a_n = 7a_{n-1}$ för alla $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

15. En magister som blev färdig år 2010 fick direkt ett jobb med lönen 2 000 euro i månaden. Varje år fick magistern en löneförhöjning på 100 euro plus 5 % av föregående årets månadslön.

    (a) Låt $p_0 = 2\,000$ vara månadslönen i euro år 2010. Bilda en rekursionsekvation som visar hur följande års månadslön p_{n+1} beror på föregående års månadslön p_n.

    (b) Bilda ett uttryck beroende av talet n med vilken man kan räkna månadslönen efter n år från det att magistern fick jobb (utan rekursion).

★ 16. Anta att $a,\ q \in \mathbb{R}$ och $q \neq 1$. Anta att $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Visa med induktion att den n:te delsumman av en geometrisk talserie, d.v.s summan av de n första termerna är

$$\sum_{i=0}^{n-1} aq^i = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q}\,.$$

Bonusuppgifter

Dessa uppgifter torde vara aningen mera krävande. Man får göra dem om man vill men man får inga extra poäng genom att göra dem.

(I) Bevisa de Morgans sats i följande allmänna form: Låt J vara en indexmängd och A_j vara delmängder till mängden X för varje $j \in J$. Visa, att

$$\complement\Big(\bigcap_{j\in J} A_j\Big) = \bigcup_{j\in J} \complement A_j \qquad \text{och} \qquad \complement\Big(\bigcup_{j\in J} A_j\Big) = \bigcap_{j\in J} \complement A_j$$

(II) Visa att

$$\{n \in \mathbb{N} \mid \sum_{k=0}^{n} k \neq \frac{n(n+1)}{2}\} = \emptyset$$

(III) Visa att

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = (\sum_{k=0}^{n} k)^2$$

för alla $n \in \mathbb{N}$.