HU / Institutionen för matematik och statistik
Inledning till universitetsmatematik, hösten 2014
Övning 3

Lösningarna skall returneras senast ons 24.9.2014 kl 19.30
Korrigeringarna skall returneras senast ons 8.10.2014 kl 19.30

Uppgiftsserie I

1. Anta, att a, b, c och d är reella tal. Visa att följande påståenden är falska genom att hitta ett motexempel:

   (a) Om $a < b$, så gäller $a^2 < b^2$. (b) Om $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, så gäller $a \in \mathbb{Z}$ och $b \in \mathbb{Z}$.

2. Vi betraktar följande härledningskedja. Är härledningen rätt? Om härledningen har ett fel, vilket är det? Vad visar denna härledning? Hurudana slutsatser kan man på basis av härledningen göra?

$$\begin{aligned} |2x+2| = x \;&\Rightarrow\; (2x+2)^2 = x^2 \;\Rightarrow\; 4x^2+8x+4 = x^2 \;\Rightarrow\; 3x^2+8x+4=0 \\ &\Rightarrow\; x = -2/3 \;\vee\; x = -2 \end{aligned}$$

3. Vi antar att A, B och C är mängder.

   (a) Rita ett Venndiagram av mängderna $(A \cup B) \setminus (B \cap C)$ och $(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

   (b) Visa med ett motexempel, att ekvationen $(A \cup B) \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ inte gäller för alla mängder A, B och C.

   (c) Visa, att en av mängderna i a-delen är en delmängd till den andra för alla mängder A, B och C.

Uppgiftsserie II

I följande uppgifter övar vi på induktionsbevis och användning av summabeteckning

4. Vi säger att ett heltal z är *delbart med heltalet* a, om det finns ett tal $b \in \mathbb{Z}$, för vilken $z = ab$. Till exempel är talet 12 delbart med 4, eftersom $12 = 4 \cdot 3$, och $3 \in \mathbb{Z}$.

   Visa med induktion att talet $4^n + 6n - 1$ är delbart med 9 för alla $n \in \mathbb{N}$.

5. Beräkna följande summor:

   (a) $\displaystyle\sum_{j=1}^{3} \frac{1}{j(j+1)}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{5} (-1)^n n^2$ (c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{4} kx$.

★ 6. Visa med induktion att för alla naturliga tal $n \geq 1$ gäller

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Uppgiftsserie III

7. Vi betraktar delmängderna $A = \{2, 4, 6, 8\}$ och $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ till mängden $\mathbb{Z}$. Bestäm

   (a) $\complement(A \cap B)$ (b) $\complement A$ (c) $\complement B$ (d) $\complement(A \cup B)$

8. Hur skulle du kunna uttrycka i föregående uppgift mängderna $\complement(A \cap B)$ och $\complement(A \cup B)$ med hjälp av mängderna $\complement A$ och $\complement B$?

9. Låt $A = \{2, 0, 1, 4\}$. Bestäm mängden $\complement A$ eller motivera varför mängden ej går att bestämma.

Uppgiftsserie IV

10. Visa att $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

★ 11. Gäller påståendet ”om $A \subset B \cup C$, så är $A \subset B$ eller $A \subset C$” för alla mängder A, B och C?

Välj en av följande uppgiftsserier. Du får dock göra båda serierna ifall du vill.

Komplexa tal

12. Beräkna (d.v.s. skriv i formen $a + bi$, där a, $b \in \mathbb{R}$).

   (a) $\dfrac{(2+i)(3-2i)}{1+i}$ (b) $\dfrac{(1-i)^3}{(2+i)^2}$ (c) $\dfrac{1}{3+i} - \dfrac{1}{3-i}$.

13. I vilken kurva i det komplexa planet är värdet av uttrycket $2(z + \bar{z})^2 + (8i - 16)z$

   (a) reellt? (b) rent imaginärt?

   Tips: Beteckna $z = x + yi$, där x, $y \in \mathbb{R}$, och undersök hurudan ekvation x och y satisfierar i situationen ovan.

★ 14. Lös den komplexa ekvationen $4z + 12i = (z - 2i)(5 + 3i)$.

Matematik för datavetenskap och statistik

15. Skriv följande påståenden med hjälp av kvantifikatorer.

    (a) $A \cap B \neq \emptyset$.

    (b) Om $c > -4$, så har ekvationen $x^2 + 5x = c$ en lösning.

    (c) Om ett tal är negativt så är det inte den andra potensen av något tal.

    (d) $A \setminus B = \emptyset$, om och endast om $A \subset B$.

16. Påståendena i denna uppgift gäller heltal. Bilda med deras negationer logiskt ekvivalenta påståenden där negationssymbolen $\neg$ inte förekommer. (Du kan använda symbolerna $\exists$, $\forall$, x, y $-$, $\neq$, 1, 0 samt parenteser). Vilken är sann, det ursprungliga påståendet eller dess negation?

    (a) $\exists x \forall y (y - x = 0)$ (b) $\forall y \exists x \left(\frac{y}{x} = 1 \right)$.

★ 17. Påståendena i denna uppgift gäller naturliga tal. Vilka är sanna? Vilka är falska? Motivera med egna ord.

    (a) $\forall m \exists n (m < n)$ (b) $\forall n \exists m (m < n)$

    (c) $\exists n \forall m (m \leq n)$ (d) $\exists m \forall n (m \leq n)$.