

HU / Institutionen för matematik och statistik  
Inledning till universitetsmatematik, hösten 2014  
Övning 2

Lösningarna skall returneras senast ons 17.9.2014 kl 19.30  
Korrigeringarna skall returneras senast ons 1.10.2014 kl 19.30

### Uppgiftsserie I

I följande uppgifter övar vi på att läsa och använda matematisk notation.

1. Förklara på svenska vad följande påståenden betyder. Vilka påståenden är sanna? Vilka är falska?

(a)  $4 \in \{x \in \mathbb{Q} : |x| > 1\}$     (b)  $12 \notin \{3n \mid n \in \mathbb{N}\}$     (c)  $12 \in \{n \in \mathbb{N} \mid 3n = 12\}$ .

2. Förklara, vad skillnaden mellan mängderna  $\emptyset$  och  $\{\emptyset\}$  är. Vad är skillnaden mellan mängderna  $\mathbb{Z}$  och  $\{\mathbb{Z}\}$ ?

3. Beräkna följande summor ifall det är möjligt. Om summan inte går att räkna, uttryck summan utan summasymbolen  $\sum$ .

(a)  $\sum_{k=2}^6 (k+1)$     (b)  $\sum_{j=0}^4 (-2)^j$     (c)  $\sum_{n=1}^7 3$     (d)  $\sum_{i=0}^n i(i+1)$ .

### Uppgiftsserie II

Följande uppgifter betraktar unionen, snittet och differensen mellan mängder samt Venn-diagram.

4. Vi betecknar  $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n = 3k \text{ där } k \in \mathbb{Z} \text{ och } n < 10\}$ . Ge ett exempel på en mängd  $B$ , för vilken

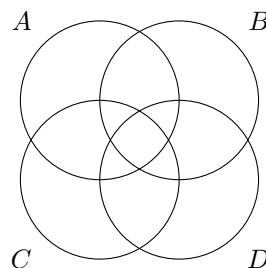
(a)  $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$     (b)  $A \cap B = \{0, 9\}$     (c)  $A \setminus B = \{0, 3\}$   
(d)  $A \cup B = \{0, 3, 6, 9\}$     (e)  $A \cap B = \emptyset$     (f)  $B \setminus A = \{2, 4, 8\}$ .

5. Den symmetriska differensen mellan två mängder  $A$  och  $B$  är mängden  $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$  och betecknas med  $A \Delta B$ . Rita ett Venn-diagram av mängden  $A \Delta B$ .

6. Komplettera följande ekvationer så att de gäller för alla mängder  $A$ ,  $B$  och  $C$ . I denna uppgift räcker Venn-diagram som motivering.

(a)  $(A \Delta B) \cap C = (C \setminus A) \Delta \underline{\hspace{2cm}}$     (b)  $(B \setminus A) \Delta C = (A \Delta C) \Delta \underline{\hspace{2cm}}$ .

7. Venn-diagram är ett bra hjälpmedel för att få en uppfattning av påståenden gällande mängder men då mängderna är flera blir Venn-diagrammen svåra att rita. Vad kan du t.ex. säga om mängderna  $(A \cap D) \setminus C$  och  $B$  på basis av det bredvidliggande diagrammet? Gäller detta allmänt?



### Uppgiftsserie III

I följande uppgifter övar vi på olika bevis tekniker. Sanningsvärdetabellen för implikationen kan hjälpa i uppgift 8.

8. Vi betraktar påståendet "om  $A \in B$  och  $B \notin C$ , så  $A \notin C$ ".

- (a) Ge ett exempel på mängder  $A$ ,  $B$  och  $C$  för vilka påståendet gäller.
- (b) Ge ett exempel som visar att påståendet inte gäller för varje mängd  $A$ ,  $B$  och  $C$ .

9. Låt  $A = \{0, 3\}$  och  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x = 0\}$ .

- (a) Visa att  $A \subset B$ .
- (b) Hur skulle du gå till väga för att undersöka ifall  $A = B$ ?

10. Visa med induktion att för varje  $n \in \mathbb{N}$  gäller

$$\sum_{i=0}^n i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

### Uppgiftsserie IV

Följande uppgifter betraktar element, delmängder samt notation.

★ 11. Vi betraktar mängden  $A = \{7, \{2\}, 8, \{6, \{9\}\}, \{\{0\}\}, \{0, 2, 7\}\}$ . Vilka av följande påståenden är sanna? Vilka är falska? Kom ihåg att motivera.

- (a)  $2 \in A$
- (b)  $\{0\} \in A$
- (c)  $\{0, 2, 7\} \in A$
- (d)  $\{\{2\}, \{\{0\}\}, 7\} \subset A$
- (e)  $\emptyset \in A$
- (f)  $\{7\} \subset A$
- (g)  $\{0, 2, 7\} \subset A$
- (h)  $\emptyset \subset A$ .

★ 12. Räkna upp alla delmängder till mängden  $A$  då

- (a)  $A = \{10^9\}$
- (b)  $A = \{10, 100, 1000\}$ .

Välj en av följande uppgiftsserier. Du får dock göra båda serierna ifall du vill.

### Komplexa tal

13. Beräkna (d.v.s. skriv i formen  $a + bi$ , där  $a, b \in \mathbb{R}$ ).

- (a)  $i^{14}$
- (b)  $(6 - 3i)^{-1}$
- (c)  $\frac{i - 4}{2i - 3}$
- (d)  $\left(\frac{3 - 1}{1 + i}\right)^2$ .

14. (a) Anta, att  $z, w \in \mathbb{C}$ . Visa, att  $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ .

(b) En hurudan figur bildas i det komplexa planet av punkterna  $z$ , som uppfyller ekvationen  $|z + 4| = |z - 2i|$ ?

★ 15. Anta, att  $a \in \mathbb{R}$ . Vi betraktar uttrycket  $(3 + ai)^2 + 8a(ai - 1)$ .

- (a) Vad är värdet på uttrycket då  $a = 1$ ?
- (b) Bestäm de reella tal  $a$ , för vilka uttrycket är reellt.
- (c) Bestäm de reella tal  $a$ , för vilka uttrycket är rent imaginärt.

## Matematik för datavetenskap och statistik

16. Är följande påståenden gällande heltal sanna eller falska? Motivera!

(a)  $\exists n(n = -n)$       (b)  $\exists n(n^2 = 2)$       (c)  $\forall n(3n \leq 4n)$       (d)  $\forall n(n^2 \geq n)$ .

17. I denna uppgift betyder  $K(x)$  ” $x$  kan spela gitarr” och  $P(x)$  betyder ” $x$  kan spela schack”. Skriv följande påståenden gällande kursens studerande med hjälp av kvantifikatorer och konnektiv.

- (a) Någon kan spela gitarr och spela schack.
- (b) Ingen kan spela gitarr eller spela schack.
- (c) Alla kan spela gitarr eller spela schack.
- (d) Alla kan spela gitarr men alla kan inte spela schack.

★ 18. Bilda ekvivalenta påståenden till negationen av följande påståenden där negationsymbolen  $\neg$  inte förekommer. Andra konnektiv samt symbolerna  $\in$  och  $\notin$  får användas. Vilken är sann, påståendet eller dess negationen?

(a)  $3 \in \mathbb{Z} \vee 3 \in \mathbb{Q}$       (b)  $1/2 \in \mathbb{Z} \wedge 1/2 \in \mathbb{Q}$       (c)  $1/2 \in \mathbb{Q} \rightarrow 1/2 \in \mathbb{Z}$   
(d)  $6 \in \mathbb{Q} \rightarrow 6 \in \mathbb{Z}$       (e)  $\pi \in \mathbb{Z} \rightarrow \pi \in \mathbb{Q}$