HU / Institutionen för matematik och statistik
Inledning till universitetsmatematik, hösten 2014
Övning 12

Lösningarna skall returneras senast ons 10.12.2014 kl 19.30

Uppgiftsserie I

1. Vi bestämmer relationen $\sim$ på mängden $\mathbb{R}$ genom: $a \sim b$, om $|a-2| = |b-2|$.
   (a) Visa, att $\sim$ är en ekvivalensrelation.
   (b) Bestäm ekvivalensklasserna $[2]_\sim$ och $[3]_\sim$.
   (c) Bilda mängden $\mathbb{R}/\sim$ bestående av alla ekvivalensklasser till relationen $\sim$.

2. Låt $A = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Vi betraktar relationen $\sim$ på mängden $A \times A$ där $(a_1, a_2) \sim (b_1, b_2)$, om och endast om $a_1 b_2 = b_1 a_2$.
   (a) Visa att $\sim$ är en ekvivalensrelation.
   (b) Bestäm ekvivalensklasserna $[(1,1)]_\sim$ och $[(2,4)]_\sim$.

Uppgiftsserie II

3. En *partition* av mängden X är en kollektion av icke-tomma delmängder A_i till X som är disjunkta och deras union är hela mängden X. Med andra ord $A_i \neq \emptyset$ för alla i, $A_i \cap A_j = \emptyset$ för alla $i \neq j$ och $\bigcup A_i = X$.

   Vilka av följande kollektioner är partitioner av mängden $X = \{1,2,3,4,5,6\}$?

   (a) $\{\{1,2\}, \{2,3,4\}, \{4,5,6\}\}$ (b) $\{\{2,4,6\}, \{1,3,5\}\}$
   (c) $\{\{1\}, \{2,3,6\}, \{4\}, \{5\}\}$ (d) $\{\{1,4,5\}, \{2,6\}\}$.

   Tilläggsinfo: Om $\sim$ är en ekvivalensrelation på mängden Y så bildar mängden av alla ekvivalensklasser $Y/\sim$ alltid en partition av Y. (detta har vi visat på förläsningarna)

4. Anta, att $\sim$ är en ekvivalensrelation på mängden A. Anta, att a, $b \in A$. Vilka av följande påståenden stämmer? Vilka stämmer inte?
   (a) $b \in [b]_\sim$.
   (b) Om $[b]_\sim = [a]_\sim$, så gäller $b = a$.
   (c) Om $[b]_\sim = [a]_\sim$, så gäller $b \in [a]_\sim$.
   (d) Om $b \in [a]_\sim$, så gäller $[b]_\sim = [a]_\sim$.

Uppgiftsserie III

5. Vi betraktar följande relationer på mängden $\mathbb{R}$:

$$R_1 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a > b\} \qquad R_2 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \geq b\} \qquad R_3 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a = b\}$$
$$R_4 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a < b\} \qquad R_5 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq b\} \qquad R_6 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \neq b\}$$

   Bestäm

   (a) $R_6 \setminus R_4$ (b) $R_2 \cap R_6$ (c) $R_1 \cup R_5$ (d) $R_2 \cap R_5$ (e) $R_5 \triangle R_6$.

6. Anta, att A är en mängd. Relationen R på mängden A är en *partiell ordning*,om den är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv. *Antisymmetrin* betyder att om $(x, y) \in R$ samt $(y, x) \in R$ för $x,\ y \in A$, så gäller $x = y$. Är följande relationer antisymmetriska?

   (a) Relationen $\leq$ på mängden $\mathbb{R}$ (relationen R_5 i uppgift 5).

   (b) Relationen $\mid$ på mängden $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ där $a \mid b$ om a delar talet b.

   (c) Relationen $\subseteq$ på mängden $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ (som på denna kurs betecknas med $\subset$).

Uppgiftsserie IV

Repetitionsuppgifter.

7. Vi definierar en heltalsföljd $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ rekursivt genom $a_0 = 1,\ a_1 = 8$ och $a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1}$, där $n \geq 1$. Visa med den II:a induktionsprincipen att $a_n = 3 \cdot 2^n + 2 \cdot (-1)^{n+1}$ för alla $n \in \mathbb{N}$.

8. Undersök om följande regler är avbildningar. Ifall någon är en avbildning, undersök ifall den är en injektion och ifall den är en surjektion?

   (a) $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$.

   (b) $g\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q},\ g(m/n) = mn$ för alla $m,\ n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0$.

9. Bestäm den inversa avbildningen till f eller motivera varför den inte existerar då

   (a) $f\colon [3, \infty[\to [0, \infty[,\ f(x) = (x-3)^2$.

   (b) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto |n+3|$.

10. Nedan ser du en uppgift och en sketch till dess lösning. Komplettera lösningen och förklara vilka definitioner och antaganden som man använder i lösningen.

    Anta att $f\colon X \to Y$ är en avbildning där $f[f^{\leftarrow}B] = B$ för alla $B \subset Y$. Visa att f är en surjektion.

    Sketch:

    $\ldots \quad \ldots \quad \{y\} \subset Y$. Vi visar att $f^{\leftarrow}\{y\} \neq \ldots$

    Vi gör motantagandet: $\ldots$ Då gäller $\ldots$ $f\emptyset = \emptyset$. Eftersom vi antog att $f[f^{\leftarrow}B] = B$ för alla $B \subset Y$, så gäller speciellt att $\ldots \quad \ldots$

    Detta ger likheten $\ldots$ vilket är en motsägelse. Alltså är motantagandet falskt och $\ldots$ Således existerar $\ldots$

Välj en av följande uppgiftsserier. Du får dock göra båda om du vill.

Komplexa tal

11. Lös den komplexa ekvationen

    (a) $x^2 = \dfrac{8}{1 - i\sqrt{3}}$ (b) $z - \bar{z} + |z| = 17 + 16i$.

12. Vi definierar relationen $\sim$ på mängden $\mathbb{C}$ genom: $z \sim w$, om $|z-1| = |w-1|$. Visa att $\sim$ är en ekvivalensrelation. Åskådliggör ekvivalensklasserna $[3]_\sim$ och $[2+2\sqrt{2}\,i]_\sim$ i det komplexa planet.

13. Anta att för talet $w \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ gäller $w^4 = 1$.

    (a) Visa att $(1+w+w^2+w^3)(w-1) = w^4 - 1$.

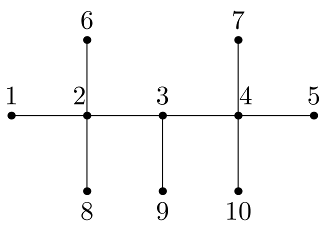
    (b) Vad är värdet av summan $1+w+w^2+w^3$.

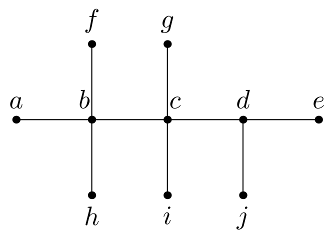
    (c) Vad är värdet av följande uttryck:

    i. $(w^2+1)(w+w^2)+1$ ii. $(w+1)^3+2w^3$ iii. $\dfrac{1}{1+w+w^2}+w$.

Matematik för datavetenskap och statistik

14. Är de oriktade graferna nedan isomorfa? Ifall ja, bestäm en isomorfism mellan graferna (d.v.s ge bijektionen f mellan nodmängderna som satisfierar isomorfismvillkoret). Ifall nej, motivera kort varför.

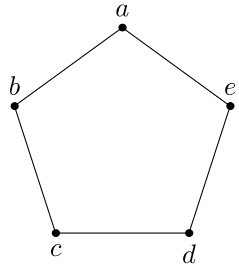


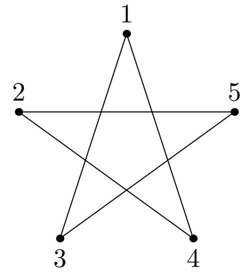


15. (a) Är de oriktade graferna G och H isomorfa, om deras grannmatriser A_G och A_H är följande matriser?

$$A_G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

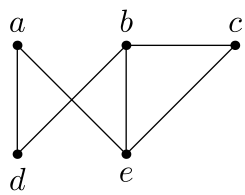
    (b) Är de oriktade graferna nedan isomorfa? Ifall ja, bestäm en isomorfism mellan graferna. Ifall nej, motivera kort varför.





16. (a) Vilka av följande nodföljder är stigar i den oriktade grafen nedan? Bestäm längden av varje stig. Vilka stigar är enkla? Vilka är cykliska?

    i. a, e, b, c, b ii. a, e, a, d, b, c, a iii. e, b, a, d, b, e iv. c, b, d, a, e, c.



(b) Är de oriktade graferna nedan sammanhängande?