HU / Institutionen för matematik och statistik
Inledning till universitetsmatematik, hösten 2014
Övning 11

Lösningarna skall returneras senast ons 3.12.2014 kl 19.30
Korrigeringarna skall returneras senast ons 10.12.2014 kl 19.30

Uppgiftsserie I

Följande uppgifter behandlar inversa avbildningar

1. Är avbildningen $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ den inversa avbildningen till $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ då

   (a) $f(x) = 2x - 1$ och $g(x) = 1 - 2x$ för alla $x \in \mathbb{R}$?

   (b) $f(x) = 0{,}5x + 2$ och $g(x) = 2x - 4$ för alla $x \in \mathbb{R}$?

   Om g inte är den inversa avbildningen till f, kan vi då dra slutledningen att f inte har en invers?

★ 2. Bestäm inversen till f eller motivera varför f inte har en invers då

   (a) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto |n - 4|$.

   (b) $f\colon [2, \infty[\to [0, \infty[$, $x \mapsto \sqrt{2x - 4}$.

Uppgiftsserie II

I följande uppgifter fördjupar vi oss i olika relationer och bekantar oss med begreppen reflexivitet, symmetri och transitivitet.

3. Anta, att a och b är heltal, där åtminstone den ena är olika noll. Det största heltalet som delar både a och b, är deras *största gemensamma faktor* och betecknas med $\mathrm{sgf}(a, b)$.

   Vi betecknar $A = \{2, 3, 4\}$ och $B = \{6, 7, 8, 9\}$. Vi definierar relationen R för mängderna A och B genom $R = \{\, (a, b) \in A \times B \mid \mathrm{sgf}(a, b) = 1 \,\}$. Räkna upp elementen i R och presentera relationen R med ett pildiagram.

4. Låt $A = \{0, 1, 2, 3\}$. Vi definierar relationen T genom

   (a) $T = \{(0, 0), (1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$.

   (b) $T = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 2)\}$.

   Presentera T med ett pildiagram och undersök med hjälp av diagrammet ifall T är reflexiv, symmetrisk eller transitiv.

5. Anta, att R är symmetrisk och transitiv. Är R då även reflexiv?

Uppgiftsserie III

I följande uppgifter bekantar vi oss med ekvivalensrelationer och ekvivalensklasser.

6. Låt X vara mängden vars element är alla ord som börjar med bokstaven k och har minst fyra bokstäver. Vi definierar relationen $\sim$ på mängden X: $x \sim y$, om och endast om de fyra första bokstäverna i orden x och y är samma. Granska att $\sim$ är en ekvivalensrelation. Hitta på fyra element i ekvivalensklassen $[\text{konstant}]_\sim$ samt i klassen $[\text{kompendium}]_\sim$.

7. Vi betecknar $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ och antar att R en ekvivalensrelation på mängden A. I tillägg så antar vi, att $\{(1, 2), (2, 3), (4, 3)\} \subset R$ och $(5, 1) \notin R$.

   (a) Gäller $(3, 1) \in R$?

   (b) Räkna upp alla element i relationen R.

   (c) Bestäm ekvivalensklasserna till R?

   Det kan hjälpa att göra ett pildiagram.

Uppgiftsserie IV

★ 8. Vi bestämmer relationen $\sim$ på mängden $\mathbb{Z}$ genom: $m \sim n$, om $m - n = 3k$ för något $k \in \mathbb{Z}$. Är relationen $\sim$ en ekvivalensrelation? Vilka är i så fall dess ekvivalensklasser?

9. Vi betraktar mängden som består av alla funktioner $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Vi definierar relationen $\sim$ på denna mängd genom: $f \sim g$, om och endast om det existerar ett $C \in \mathbb{R}$, så att $f(x) - g(x) = C$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Gäller $f \sim g$, om $f(x) = 2x + 7$ och $g(x) = 2x - 3$ för alla $x \in \mathbb{R}$?

   (b) Visa, att $\sim$ är en ekvivalensrelation.

   (c) Räkna upp fyra element i ekvivalensklassen $[h]_\sim$ då $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^2$.

Uppgiftsserie V

10. Fibonaccitalen definieras genom $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ och $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ för alla naturliga tal $n \geq 2$. Visa med induktion att för alla naturliga tal $n \geq 1$ gäller

$$F_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}.$$

Välj en av följande uppgiftsserier. Du får dock göra båda om du vill.

Komplexa tal

★ 11. Lös den komplexa ekvationen

(a) $z^6 = -4 + 4\sqrt{3}i$ (b) $z^4 - 27z = 0$

och märk ut lösningarna i det komplexa planet.

12. Lös den komplexa ekvationen

(a) $(x^2 + 5)(x^3 + 2\sqrt{2}i) = 0$ (b) $x^2 + (2 - 2i)x + 9 - 2i = 0$

och märk ut lösningarna i det komplexa planet. Tips för b) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + c^2$

13. Vi betraktar avbildningen $f\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{1\},\ f(z) = \dfrac{z - 2i}{z}$.

(a) Bestäm $f(1 - i)$.

(b) Bestäm den inversa avbildningen till f eller motivera varför den inte har en invers.

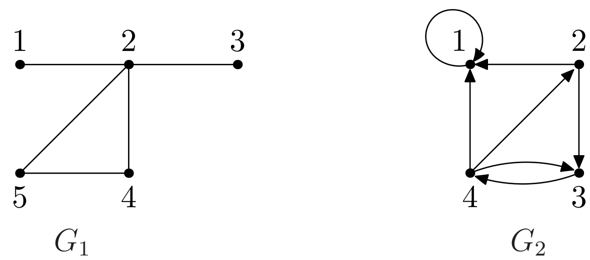
Matematik för datavetenskap och statistik

14. Gäller följande påståenden för alla heltal a och b, alla positiva heltal c och d samt alla heltal $m > 1$?

(a) Om $a \equiv b \pmod{m}$, så gäller $ac \equiv bc \pmod{mc}$.

(b) Om $a \equiv b \pmod{m}$ och $c \equiv d \pmod{m}$, så gäller $a^c \equiv b^d \pmod{m}$.

15. I denna uppgift betraktar vi den oriktade grafen G_1 och den riktade grafen G_2. Vi betecknar mängden av alla noder med V_k samt mängden av alla bågar med E_k för graferna $G_k,\ k \in \{1, 2\}$.



Vilka av följande påståenden är sanna? Vilka är falska? Motivera.

(a) $(4,2) \in E_1$ och $(2,4) \in E_2$.

(b) $5 \in V_1$ eller $(4,1) \in E_2$.

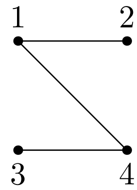
(c) Noderna 1 och 5 till grafen G_1 är grannar.

(d) Grafen G_2 har en loop.

(e) För grafen G_1 gäller $\deg(3) + \deg(4) = \deg(2)$.

(f) För grafen G_1 gäller $\sum_{v \in V_1} \deg(v) = 11$.

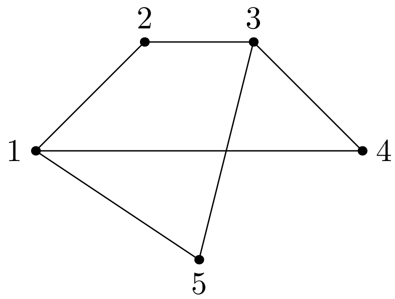
★ 16. (a) Presentera den oriktade grafen G med en grannmatris.

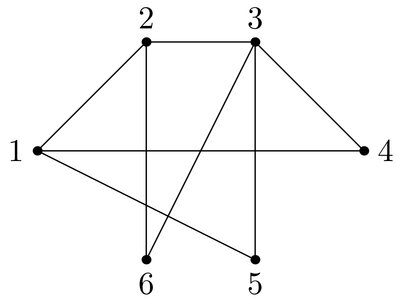


(b) Rita den riktade grafen H, vars grannmatris är

$$A_H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Är följande grafer tudelade?





Tips till uppgift 10: $5/2 = 10/4 \geq 9/4 = (3/2)^2$.