HU / Institutionen för matematik och statistik
Inledning till universitetsmatematik, hösten 2014
Övning 10

Lösningarna skall returneras senast ons 26.11.2014 kl 19.30
Korrigeringarna skall returneras senast ons 10.12.2014 kl 19.30

Uppgiftsserie I

Följande uppgifter behandlar sammansatta avbildningar. Ett bra hjälpmedel för att rita grafer är t.ex. Wolfram|Alpha.

1. Anta, att f, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Bilda de sammansatta avbildningarna $f \circ g$ och $g \circ f$, då
   (a) $f(x) = 2x - 1$ och $g(x) = \cos(x)$ för alla $x \in \mathbb{R}$.
   (b) $f(x) = x^2$ och $g(x) = 3x + 4$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

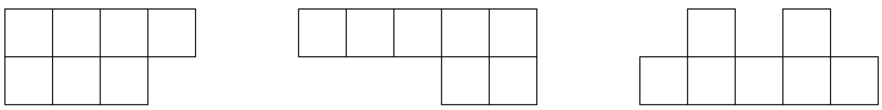
2. Vi definierar avbildningarna $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ och $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genom
$$f(x) = \begin{cases} 2\,, & \text{om } x < 0; \\ 0{,}5x\,, & \text{om } x \geq 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 - 1\,, & \text{om } -2 \leq x \leq 2; \\ -1\,, & \text{annors.} \end{cases}$$
   (a) Rita grafen av funktionerna f och g i intervallet $[-4, 4]$.
   (b) Bestäm den sammansatta funktionen $f \circ g$ rita dess graf i intervallet $[-4, 4]$.

   Tips för b-delen: då du bestämmer den sammansatta funktionen, använd grafen av g som hjälp för att bestämma, när $g(x) \geq 0$; med andra ord, för vilka värden på x gäller $f(g(x)) = 0{,}5g(x)$.

Uppgiftsserie II

I följande uppgift övar vi på att använda den andra induktionsprincipen. Ett tips till uppgiften är given i slutet efter uppgifterna.

★ 3. Anta, att n är ett naturligt tal $n \geq 1$. Vi betraktar en platta som är uppbyggd av n kvadrater (jmf. chokladplatta). I bilden nedan finns ett par exempel av sådana plattor då $n = 7$. Visa med hjälp av den andra induktionsprincipen att alla plattor med n kvadrater kan delas upp i skilda kvadrater med $n - 1$ skärningar.



Uppgiftsserie III

Följande uppgifter behandlar begreppet invers avbildning.

4. Visa, att avbildningen g är den inversa avbildningen till f då $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ och $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är definierade genom $f(x) = 0{,}5x - 1{,}5$ och $g(x) = 2x + 3$.

5. Bestäm den inversa avbildningen till f eller visa att f inte har en invers då
   (a) $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ är avbildningen där $z \mapsto 4z + 5$.
   (b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är avbildningen där $x \mapsto 5x + 4$.

Uppgiftsserie IV

I följande uppgifter behandlar vi injektioner och surjektioner. I uppgift 6 kan det hjälpa att rita först grafen till avbildningen.

6. Låt $h\colon \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R}$, där

$$x \mapsto \frac{2}{3-x} \quad \text{för alla } x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}.$$

Är avbildningen h en injektion? Är den en surjektion?

★ 7. Anta, att X, Y, Z är mängder och $f\colon X \to Y$ samt $g\colon Y \to Z$ avbildningar.

(a) Anta, att f och g är injektioner. Visa, att $g \circ f$ är en injektion.

(b) Anta, att f och g är surjektioner. Visa, att $g \circ f$ är en surjektion.

Uppgiftsserie V

Följande uppgifter behandlar begreppen bild, urbild, injektion och surjektion. I uppgifterna 8–9 påminn dig om hur man visar att en mängd är en delmängd till en annan mängd.

8. Anta, att $f\colon X \to Y$ är en injektion och att $A \subset X$. Visa, att $f^{\leftarrow}[fA] \subset A$.

9. Anta, att $f\colon X \to Y$ är en surjektion och att $B \subset Y$. Visa, att $B \subset f[f^{\leftarrow}B]$.

★ 10. För uppgiften nedan finns en skiss till en lösning. Komplettera lösningen och förklara, vilka definitioner och antaganden används i lösningen.

Anta, att $f\colon X \to Y$ är en avbildning för vilken $f^{\leftarrow}[fA] = A$ för alla $A \subset X$. Visa, att f är en injektion.

Lösning:

$\ldots \quad \ldots \qquad f(x_1) = f(x_2) \qquad \ldots \quad \ldots \qquad A = \{x_1\} \qquad \ldots \quad \ldots \qquad fA = \{f(x_1)\}$

$\ldots \quad \ldots \qquad x_1, x_2 \in f^{\leftarrow}\{f(x_1)\} = \{x_1\} \qquad \ldots \quad \ldots \qquad x_1 = x_2.$

Välj en av följande uppgiftsserier. Du får dock göra båda om du vill.

Komplexa tal

11. Anta, att $a \in \mathbb{R}$ och betrakta funktionen $f_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, där $x \mapsto ax^2 - 2x + 5$.

(a) Bestäm talen a, för vilka grafen av funktionen f_a inte möter x-axeln.

(b) Anta, att $a = 0{,}25$. Rita grafen av funktionen f_a i intervallet $[1, 7]$ och lös den komplexa ekvationen $f_a(x) = 0$.

12. Lös den komplexa ekvationen

$$\text{(a)} \quad z^4 = -1 \qquad\qquad \text{(b)} \quad z^3 = -8i$$

och märk ut lösningarna i det komplexa planet.

13. Vi betraktar avbildningen $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, där $f(z) = 2iz$ för alla $z \in \mathbb{C}$.

(a) Rita två komplexa plan. Märk ut i det första planet talen $1/2$, i samt $-3/2$ och i det andra planet talen $f(1/2)$, $f(i)$ samt $f(-3/2)$.

(b) Rita i det första planet mängden $A = \{1{,}5e^{i\varphi} \mid \varphi \in \mathbb{R}\}$. Bedöm med hjälp av a-delen hur bilden fA ser ut och rita ut den i det andra komplexa planet.

(c) Beskriv med egna ord vad avbildningen f gör åt punkterna i det komplexa planet.

14. ISSN (International Standard Serial Number) är en kod som ges till publikationer som periodiskt eller fortlöpande utkommer i tryck eller elektroniskt. Den är av formen $d_1d_2d_3d_4$-$d_5d_6d_7d_8$, där de sju första tecken är siffror. Sista tecknet d_8 är ett kontrolltecken. Kontrolltecknet är den siffra $0, 1, \ldots, 9$ som bestäms av kongruensen

$$d_8 \equiv \sum_{k=1}^{7} (k+2)d_k \pmod{11},$$

eller om $d_8 \equiv 10 \pmod{11}$ är kontrolltecknet X.

    (a) Kontrollera ifall följande koder är möjliga ISSN-koder. Har de rätt kontrolltecken?

    i. 0002-9890 ii. 0355-3967.

    (b) Om ett av de första sju tecken är fel i en ISSN-kod, kommer felet med säkerhet fram med hjälp av kontrolltecknet? Eller är det möjligt att ett av tecknen är fel men kontrolltecknet är ändå rätt?

15. (a) Beräkna $3\,141\,592\,654 \bmod 10$.

    (b) Vilken är sista siffran i talet 3^{123456} om talet skrivs ut på vanligt sätt?

16. Anta, att a, $b \in \mathbb{Z}$ och $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Visa, att om $a \equiv b \pmod{n}$, så gäller $n \mid (a-b)$.

Tips till uppgift 3: I induktionssteget betraktar vi en platta med $n+1$ kvadrater. Gör till denna platta först en skärning. Hurdana plattor har du efter det? Kan du använda induktionsantagandet på de två plattor som kvarstår efter skärningen?