HU / Institutionen för matematik och statistik
Gamla provuppgifter, Inledning till universitetsmatematik 2. kursprov

1. Vi bestämmer relationen $\sim$ på mängden $\mathbb{Z}$ genom: $a \sim b$ om $a-b$ är delbart med 2, dvs. om $a-b=2k$ för något $k \in \mathbb{Z}$.
   (a) Visa, att $\sim$ är en ekvivalensrelation
   (b) Bestäm $[0]_\sim$ och $[7]_\sim$. Vilka är ekvivalensklasserna till $\sim$.

2. Vi betraktar avbildningen $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty[$, $h(x, y) = x^2 + y^2$.
   (a) Beräkna $h(-2, 0)$ och $h(0, 2)$.
   (b) Bestäm mängderna $h^{\leftarrow}\{4\}$ och $h^{\leftarrow}[0, 1]$. Åskådliggör mängderna i ett koordinatsystem.
   (c) Är h en surjektion? Motivera ditt svar.

3. (a) Anta, att $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Vi bestämmer reglerna $\tau : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ och $\rho : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ genom
   $$\tau\Big(\frac{a}{b}\Big) = \frac{a^2+b}{b^2} \quad \text{och} \quad \rho\Big(\frac{a}{b}\Big) = \frac{a+b}{b}.$$
   Är τ en avbildning? Är ρ? Motivera dina svar.
   (b) Anta, att $f : X \to Y$ är en avbildning och $A, B \subset X$. Visa att om f är en injektion så gäller $fA \cap fB \subset f[A \cap B]$.

4. (a) Vi bestämmer reglerna $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ och $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ genom
   $$f(z) = \frac{4+z}{2} \text{ och } g\Big(\frac{m}{n}\Big) = \frac{m^2+2n^2}{n^2+2}$$
   för alla $z, m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$. Är f en avblidning? Är g?
   (b) Anta, att A, B, C och D är mängder och $(A \times B) \cap (C \times D) = \emptyset$. Visa att då gäller $A \cap C = \emptyset$ eller $B \cap D = \emptyset$.

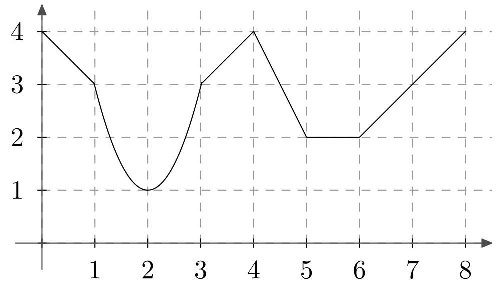
5. (a) Vi betraktar avbildningen $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(z) = 3 + z$. Bestäm den inversa avbildningen till f eller motivera varför den inte existerar.
   (b) Anta, att $f : X \to Y$ är en bijektion. Anta därtill, att $A \subset X$ och $B \subset Y$. Visa, att $f^{\leftarrow}B \subset A$ om och endast om $B \subset fA$.

6. Vi bestämmer relationen $\sim$ på mängden $\mathbb{N}$ genom $n \sim m$ om det finns ett heltal k så att $n = m \cdot 2^k$.
   (a) Visa att $\sim$ är en ekvivalensrelation.
   (b) Bestäm ekvivalensklasserna $[0]_\sim$, $[1]_\sim$ och $[3]_\sim$.

7. (a) Vi betraktar avbildningen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,
   $$f(n) = \begin{cases} 2n, \text{ om } n \in \mathbb{N} \text{ är jämnt}, \\ n+3, \text{ om } n \in \mathbb{N} \text{ är udda}. \end{cases}$$
   Låt $A = \{2, 3, 4\}$. Bestäm bilden fA och urbilden $f^{\leftarrow}A$. Motivera dina svar.

8. (a) Anta, att $f : X \to Y$ är en avbildning och $B \subset Y$. Visa att om $fX \subset \complement B$ så gäller $f^{\leftarrow}B = \emptyset$. Använd indirekt härledning.

(b) I bilden nedan ser man grafen till funktionen $f\colon [0,8] \to \mathbb{R}$. Bestäm med hjälp av bilden $f[1,5]$ och $f^{\leftarrow}[0,3]$. Motivera genom att skriva ut definitionen på dessa begrepp.



9. Bestäm den inversa avbildningen till f eller motivera varför den inte existerar då

- $f : [0,3] \to [-2,2],\ f(x) = 2 - (x-1)^2$
- $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q},\ f(x) = 4x + 2$.

10. Vi bestämmer relationen $\sim$ på mängden $\mathbb{R}$ genom: $a \sim b$ om och endast om $a - b \in \mathbb{Z}$.

- Visa att $\sim$ är en ekvivalensrelation
- Skriv ekvivalensklasserna $[0]_\sim$ och $[3,14]_\sim$ som mängder. Räkna upp fyra olika element från båda klasserna.
- Vi betraktar avbildningen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\sim,\ f(x) = [x]_\sim$. Är f en injektion? Är f en surjektion?

11. Anta, att $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Använd indirekt härledning för att visa att åtminstone ett av talen $a - b,\ a + c$ och $b - c$ är jämnt.

12. (a) Vi betraktar funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 0,5x - 3$. Är någon av följande funktioner inversen till f? Motivera.

$$\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \alpha(x) = 3 - 0,5x \qquad \beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \beta(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{3}$$

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \gamma(x) = 2x + 6 \qquad \delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \delta(x) = \frac{1}{0,5x - 3}$$

(b) Vi betraktar avbildningen $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},\ g(n) = (2n, n+3)$. Beräkna $g(1)$ och $g(-4)$. Är g en injektion? Surjektion?

13. (a) Vi bestämmer relationen $\sim$ på mängden $\mathbb{Z}$ genom: $a \sim b$ om och endast om $a + b$ är ett jämnt tal. Är $\sim$ reflexiv? Symmetrisk? Transitiv?

(b) En bitföljd är en (ändlig) följd av nollor och ettor; t.ex. 0010 och 111 är bitföljder. Vi betraktar mängden S som består av alla bitföljder med högst fyra element. Vi definierar relationen $\sim$ på mängden S genom: $a \sim b$ om och endast om $a = b$ eller a och b har båda minst två element och deras första två element är samma. Alltså t.ex. $0 \sim 0$ och $11 \sim 110$.

Relationen $\sim$ är en ekvivalensrelation på S. Bestäm ekvivalensklasserna $[1]_\sim$, $[01]_\sim$ och $[1010]_\sim$. Hur många olika ekvivalensklasser har relationen $\sim$ allt som allt?

Komplexa tal

14. Låt $w = -\sqrt{2} + i\sqrt{6}$.

    (a) Skriv w i polär och exponentiell form.

    (b) Lös den komplexa ekvationen $x^3 = w$. Märk ut lösningarna i det komplexa planet.

15. (a) Lös den komplexa ekvationen $x^6 = -8$ och märk ut lösningarna i det komplexa planet.

    (b) Vi betraktar funktionen $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_a(x) = ax^2 - 4x + 2$. Bestäm alla tal $a \in \mathbb{R}$ för vilka grafen till f_a inte skär x-axeln.

16. (a) Skriv talet $w = 4\sqrt{2}(-1 - i)$ i exponentiell form. Bestäm real- samt imaginärdelen av talet w^{12}.

    (b) Lös den komplexa ekvationen $(x^2 - 4x + 5)(x^3 + 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i) = 0$ och märk ut lösningarna i det komplexa planet.

17. (a) Den komplexa ekvationen $x^5 - 4x^4 + 5x^3 + 3\sqrt{3}x^2 - 12\sqrt{3}x + 15\sqrt{3} = 0$ kan skrivas i formen

    $$(x^2 - 4x + 5)(x^3 + 3\sqrt{3}) = 0.$$

    Lös ekvationen och märk ut lösningarna i det komplexa planet.

    (b) Bestäm alla tal $n \in \mathbb{Z}$ för vilka $(\sqrt{3} - i)^n \in \mathbb{R}$.

Matematik för datavetenskap och statistik

18. (a) Antа, att $a, b \in \mathbb{Z}$ och $a \equiv 4 \pmod{13}$ och $b \equiv 9 \pmod{13}$. Sök ett heltal c för vilket $0 \le c \le 12$ och

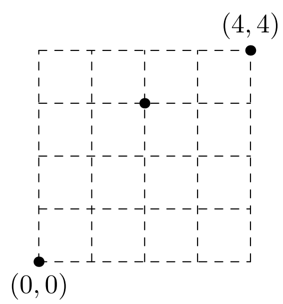
    $$i. \quad c \equiv 2a + 3b \pmod{13} \qquad ii. \quad c \equiv a^2 + b^2 \pmod{13}.$$

    (b) Vi betraktar sådana rutter från punkten $(0, 0)$ till punkten $(4, 4)$ som består av steg av längden en ruta antingen till höger eller uppåt. Varje sådan rutt kan beskrivas med en bitföljd med åtta element, där 0 betyder ett steg till höger och 1 betyder ett steg uppåt.

    i. Hur många sådana rutter finns det från $(0, 0)$ till $(4, 4)$?

    ii. Hur många av rutterna går genom punkten $(2, 3)$?

    iii. Hur många av rutterna är sådana som **inte** går genom punketn $(3, 2)$?



19. (a) Bestäm $\log_2 128$. Motivera. Anta, att $a \in \mathbb{R}$ och $a > 1$. Hur mycket växer logaritmen med basen 2 av talet a om a har en 8-faldig tillväxt?

    (b) Räkna 17 mod 5 och skriv motsvarande division med rest för talet 17.

(c) Anta, att $n, k \in \mathbb{N}$ och $k \leq n$. Förklara vad beteckningen

$$\binom{n}{k}$$

betyder och motivera att

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

20. (a) Bestäm ett närmevärde för talet $\log_2 100$ utan att ändra på basen. Anta, att $a \in \mathbb{R}$ och $a > 1$. Vad måste man göra med talet a för att dess logaritm skall få en 5-faldig tillväxt?

(b) Bestäm 7^5 mod 24. Detta prov började kl. 13.00. Om provet skulle ha flyttats 7^5 timmar framåt, vid vilket klockslag skulle provet ha görjat?

(c) Bestäm $\binom{6}{2}$ och förklara vad talet betyder enligt kursens definition på en binomialkoefficient. Vi bildar en bitföljd (d.v.s. en följd med nollor och ettor) som har åtta element och fyra av dem är ettor. Hur många olika bitföljder av denna typ kan man framställa?

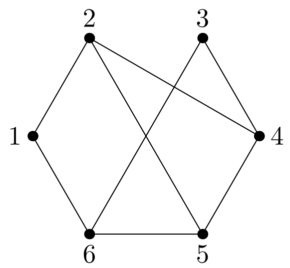
21. Vi betraktar bitföljder med 16 element som t.ex. 0011010110010110. Hur många sådana följder finns det med

(a) exakt tre nollor?

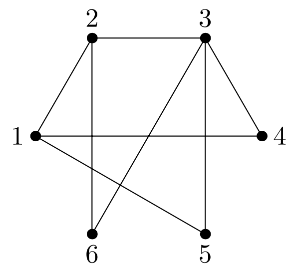
(b) exakt åtta ettor och följden börjar och slutar med en etta?

22. En mängd X har exakt 56 delmängder med tre element. Hur många element har X?

23. Vi betraktar de oriktade graferna G och H nedan.



G



H

(a) Är grafen G tudelad?

(b) Ge någon stig till grafen G vars längd är 6. Är stigen enkel? Är den cyklisk?

(c) Är graferna G och H isomorfa?