Inledning till universitetsmatematik, hösten 2013

Matematik för dataveteskap och statistik

Elementär logik

De vanligaste (satslogiska) konnektiven är:

negation	$\neg$	inte
konjunktion	$\wedge$	och
disjunktion	$\vee$	eller
implikation	$\longrightarrow$	om ..., så ...
ekvivalens	$\longleftrightarrow$	... om och endast om ...

Låt p och q beteckna två påståenden. Med ovannämnda konnektiv kan man bilda satslogiska formler vars sanningsvärde beror på p:s och q:s respektive sanningsvärde.

Vi har följande sanningsvärdetabeller, där 1 representerar sann och 0 falsk:

p	$\neg p$
1	0
0	1

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Exempel 1: Låt S beteckna "jag sitter".
och T beteckna "jag tänker".

Vad uttrycker följande satslogiska formler?

$$S \rightarrow T, \quad \neg S \vee T, \quad \neg(S \wedge T), \quad \neg S \vee \neg T.$$

Gör även en sanningsvärdetabell för varje formel. Vad märker du?

$S \rightarrow T$: "om jag sitter, så tänker jag".

$\neg S \vee T$: "jag sitter inte, eller så tänker jag"

$\neg(S \wedge T)$: "det är inte så att jag sitter och tänker"

$\neg S \vee \neg T$: "jag sitter inte, eller så tänker jag inte".

S	T	$S \rightarrow T$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

S	T	$\neg S$	$\vee$	T
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	0

S	T	$\neg$	$(S \wedge T)$
1	1	0	1
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	1	0

S	T	$\neg S$	$\vee$	$\neg T$
1	1	0	0	0
1	0	0	1	1
0	1	1	1	0
0	0	1	1	1

Vi märker att $S \to T$ och $\neg S \vee T$
samt $\neg(S \wedge T)$ och $\neg S \vee \neg T$
alltid har samma sanningsvärde.
Alltså är $S \to T$ och $\neg S \vee T$
ekvivalenta samt $\neg(S \wedge T)$ och $\neg S \vee \neg T$
fre 7.9 är ekvivalenta. Detta betyder, att
$(S \to T) \leftrightarrow (\neg S \vee T)$ och $\neg(S \wedge T) \leftrightarrow (\neg S \vee \neg T)$
är tautologier, d.v.s. formler som alltid är
sanna.

S	T	$(S \to T)$	$\leftrightarrow$	$(\neg S \vee T)$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

Kvantifikatorer

Ett påståendet som har en s.k. fri variabel kan vara sann för något variabelvärde och falsk för något annat värde. Exempelvis är påståendet

$x^2 + 1 = 5$ för reella tal sant då $x = 2$ och då $x = -2$ men falskt då $x \notin \{-2, 2\}$. Påståendet är alltså sant för något reellt tal och vi betecknar det med

$$\exists x\,(x^2+1=5)$$

$\exists$: "det existerar", eller, "för något"

Påståendet $|x| \geq 0$ för reella tal är sant för varje $x \in \mathbb{R}$. Vi betecknar:

$$\forall x\,(|x| \geq 0)$$

$\forall$: "för alla"

Exempel 2: Är följande påståenden gällande reella tal sanna eller falska:

(a) $\exists x\,(x^2 = 2)$ (b) $\exists x\,(x^2 = -1)$

(c) $\forall x\,(x^2 > 0)$ (c) $\forall x\,(0 < x < 1 \vee x^2 \geq x)$

(a) Sant, eftersom $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ och $(\sqrt{2})^2 = 2$.

(b) falskt, eftersom det finns inte $x \in \mathbb{R}$ så att $x^2 = -1$

(c) falskt, eftersom $0 \in \mathbb{R}$ och $0^2 = 0$ är inte större än 0.

(d) Sant. Låt $x \in \mathbb{R}$ vara godtyckligt.

<u>Om $x \leq 0$</u> så gäller $x^2 \geq 0 \geq x$ och därmed är $0<x<1 \vee x^2 \geq x$ sant

<u>Om $0<x<1$</u> så är $0<x<1 \vee x^2 \geq x$ sant.

<u>Om $x \geq 1$</u> så gäller $x^2 \geq x$ och därmed är $0<x<1 \vee x^2 \geq x$ sant.

Alltså, $0<x<1 \vee x^2 \geq x$ är sant för alla $x \in \mathbb{R}$.

<u>Exempel 3</u>: Skriv följande påståenden gällande mängder med hjälp av logiska symboler

(a) $A \subset B$ $\quad \forall x\,(x \in A \rightarrow x \in B)$

(b) $A \not\subset B$ $\quad \exists x\,(x \in A \wedge x \notin B)$

(c) $A \setminus B \neq \emptyset$ $\quad \exists x\,(x \in A \wedge x \notin B)$

(d) $A \cap B = \emptyset$ $\quad \forall x\,(x \in A \rightarrow x \notin B)$

Visar att (b) och (c) påstår samma sak, d.v.s.

$$A \not\subset B \text{ om och endast om } A \setminus B \neq \emptyset$$

<u>Exempel 4</u>: Skriv följande påståenden gällande människor med hjälp av logiska symboler samt bilda negationen till påståendena.

(a) det finns en person som bor i Guntäkt och talar svenska.

(b) Alla människor som bor i Guntäkt talar svenska.

—

$G(x)$: "x bor i Gumtäkt"
$S(x)$: "x talar svenska"

(a) $\exists x\,(G(x) \wedge S(x))$

Negation: för alla människor gäller att hon bor inte i Gumtäkt eller talar inte svenska.

$$\forall x\,(\neg G(x) \vee \neg S(x))$$

(b) $\forall x\,(G(x) \to S(x))$

Negation: det existerar en person som bor i Gumtäkt och talar inte svenska.

fre 13.9

$$\exists x\,(G(x) \wedge \neg S(x))$$

- För påståenden av formen $\forall x P(x)$ betyder negationen $\neg \forall x P(x)$ samma sak som $\exists x \neg P(x)$

- För påståenden av formen $\exists x P(x)$ betyder negationen $\neg \exists x P(x)$ samma sak som $\forall x \neg P(x)$.

Påståenden med två kvantifikatorer

Exempel 5: Vad uttrycker följande påståenden gällande reella tal? Är de sanna eller falska?

(a) $\forall x \exists y\,(x+y=0)$ (b) $\forall x \exists y\,(xy=1)$

(c) $\exists x \forall y\,(x<y)$ (d) $\exists x \forall y\,(xy=0)$

(a) $\forall x \exists y\, (x+y=0)$: "För varje reellt tal x existerar ett reellt tal y, så att $x+y=0$".

Sant. För ett godtyckligt $x \in \mathbb{R}$ väljer vi $y=-x$. Då är $x+y = x+(-x) = x-x = 0$.

(b) $\forall x \exists y\, (xy=1)$: "För varje reellt tal x existerar ett reellt tal y så att $xy=1$".

Falskt. Låt $x=0$. Då är $xy = 0 \cdot y = 0 \neq 1$ för varje $y \in \mathbb{R}$.

(c) $\exists x \forall y\, (x<y)$: "Det existerar ett reellt tal x så att för varje reellt tal y gäller $x<y$". Med andra ord "Det existerar ett reellt tal x som är mindre än alla reella tal".

Falskt. Om påståendet skulle gälla för $x \in \mathbb{R}$, så skulle $x<x$ vilket är en motsägelse.

(d) $\exists x \forall y\, (xy=0)$: "Det existerar ett reellt tal x så att för varje reellt tal y gäller $xy=0$".

Sant. Låt $x=0$. Då är $xy = 0 \cdot y = 0$ för varje $y \in \mathbb{R}$.

Exempel 6: Vad uttrycker följande påståenden gällande studerande på denna kurs?

Här betecknar $H(x,y)$: "x hjälper y med hemuppgifterna"

och $M(x)$: "x har matematik som huvudämne"

(a) $\forall x \exists y\, H(x,y)$ (b) $\exists x \exists y (M(x) \wedge H(x,y))$

(c) $\forall x \exists y (H(x,y) \wedge \neg M(y))$ (d) $\forall x \forall y\, H(x,y) \wedge \exists z M(z)$

(a) $\forall x \exists y\, H(x,y)$: "Varje studerande hjälper någon med hemuppgifterna".

(b) $\exists x \exists y (M(x) \wedge H(x,y))$: "det finns en studerande som har matematik som huvudämne och hjälper någon med hemuppgifterna".

(c) $\forall x \exists y (H(x,y) \wedge \neg M(y))$: "Varje studerande hjälper någon studerande som inte har matematik som huvudämne med hemuppgifterna".

(d) $\forall x \forall y\, H(x,y) \wedge \exists z M(z)$: "alla studerande hjälper varandra med hemuppgifterna och det finns en studerande med matematik som huvudämne".

fre 20.9.

Geometriska talföljder

En talföljd $a_0, a_1, a_2, \ldots$ bestämms med hjälp av en regel:

Ex. $a_n = 2^n$, för alla $n \in \mathbb{N}$, ger talföljden
$2^0, 2^1, 2^2, \ldots$

Ex. $a_n = 0$, för alla $n \in \mathbb{N}$, ger talföljden
$0, 0, 0, \ldots$

Ofta bestämms en talföljd rekursivt:

Ex.
$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, & \text{för alla } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

ger: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$ (Fibonacci)

Det finns olika sätt att finna en explicit form för olika typer av rekursiva talföljder (hör inte till kursinnehållet).

Ex. Fibonaccitalen explicit:

$$a_n = \frac{\phi^n - (1-\phi)^n}{\sqrt{5}}, \quad \text{där} \quad \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{(gyllene snittet)}$$

Definition 7: Talföljden $a_0, a_1, a_2, \ldots$ är geometrisk om det existerar ett reellt tal q så att

$$a_{n+1} = q a_n \text{ för alla } n \in \mathbb{N}.$$

Notera, att om $a_n \neq 0$, så är q kvoten $\frac{a_{n+1}}{a_n}$

Exempel 8: Låt $a_0, a_1, a_2, \ldots$ vara en talföljd. Är talföljden geometrisk, då

(a) $a_n = -1$, för alla $n \in \mathbb{N}$ (b) $a_n = (-1)^n$, för alla $n \in \mathbb{N}$

(c) $a_n = n+1$, för alla $n \in \mathbb{N}$ (d) $a_n = 2 \cdot 5^n$, för alla $n \in \mathbb{N}$.

(a) Ja, eftersom $a_{n+1} = -1 = 1 \cdot (-1) = 1 \cdot a_n$

för alla $n \in \mathbb{N}$.

(b) Ja, eftersom $a_{n+1} = (-1)^{n+1} = (-1)(-1)^n = (-1)a_n$

för alla $n \in \mathbb{N}$.

(c) Nej. Eftersom $\dfrac{a_1}{a_0} = \dfrac{1+1}{1+0} = 2$

och $\dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{2+1}{1+1} = \dfrac{3}{2}$

så är $a_1 = 2a_0$ men $a_2 = \frac{3}{2} a_1$.

(d) Ja, eftersom $a_{n+1} = 2 \cdot 5^{n+1} = 2 \cdot 5 \cdot 5^n$

$= 5 \cdot 2 \cdot 5^n$

$= 5 a_n$

för alla $n \in \mathbb{N}$.

Exempel 9: Är följande talföljder $a_0, a_1, a_2, \ldots$ geometriska då de börjar på följande sätt:

(a) $25, 15, 9, 27/5, \ldots$

(b) $12, 18, 30, 42, \ldots$

(c) $0, 0, 0, \ldots$

(d) $\sqrt{2}, 0, 0, 0, 0, \ldots$

(a) Ser ut att vara geometrisk, eftersom

$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}, \quad \frac{a_2}{a_1} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

och $\dfrac{a_3}{a_2} = \dfrac{27/5}{9} = \dfrac{27}{9 \cdot 5} = \dfrac{3}{5}$ och därmed

är kvoten q konstant.

(b) Nej, eftersom $\dfrac{a_1}{a_0} = \dfrac{18}{12} = \dfrac{3}{2}$

men $\dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{30}{18} > \dfrac{27}{18} = \dfrac{3}{2} = \dfrac{a_1}{a_0}$

(c) Ja, eftersom $a_{n+1} = 0 = 1 \cdot 0 = 1 \cdot a_n$ för alla $n \in \mathbb{N}$

(notera: istället för 1 kan man välja vilket tal som helst)

(d) Ja, eftersom $a_1 = 0 = 0 \cdot \sqrt{2} = 0 \cdot a_0$
och $a_{n+1} = 0 = 0 \cdot 0 = 0 \cdot a_n$ för alla $n \geq 1$.

Alltså $a_{n+1} = 0 \cdot a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

<u>Sats 10</u>: Anta, att $a_0, a_1, a_2, \ldots$ är en geometrisk talföljd, d.v.s. det existerar $q \in \mathbb{R}$ så att $a_{n+1} = q a_n$ för alla $n \in \mathbb{N}$.

Då gäller $a_n = q^n a_0$ för alla $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

<u>Bevis</u>: Vi bevisar med induktion:

<u>Bassteg</u>: $a_1 = q a_0 = q^1 a_0$ Påståendet gäller alltså för $n=1$.

<u>Induktionssteg</u>:

Induktionsantagande: Anta, att

$a_k = q^k a_0$ för något $k \geq 1$.

Då gäller $a_{k+1} = q a_k \overset{\text{i.a.}}{=} q q^k a_0 = q^{k+1} a_0$

Alltså på basis av induktionsprincipen gäller

$a_n = q^n a_0 \quad \forall n \geq 1$.

En geometrisk serie är en (formell) summa av formen $\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = a + aq + aq^2 + \ldots$

(överenskommelse: $q^0 = 1$ även om $q = 0$)

[Mera om serier i Analys II]

Den n:te delsumman av den geom. serien $\sum_{k=0}^{\infty} aq^k$ är summan $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} aq^k$.

fre 27.9.

Sats 11: Betrakta den geometriska serien

$$\sum_{k=0}^{\infty} a q^k \quad , \text{där } a, q \in \mathbb{R}.$$

Då är $S_n = \begin{cases} a \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q} & , \text{om } q \neq 1 \\ na & , \text{om } q = 1 \end{cases}$

för alla $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Bevis: $q \neq 1$: Övningsuppgift

$\underline{q=1}$: $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} a q^k = \sum_{k=0}^{n-1} a = \underbrace{a + a + \dots + a}_{n \text{ st.}}$

$= na$ $\square$

Exempel 12: Beräkna S_6 för den geometriska serien

(a) $3 + 12 + 48 + \dots$

(b) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots$

Vi använder formeln $S_6 = \dfrac{a \cdot (1-q^6)}{1-q}$

i (a) är $a = 3$ och $q = 12/3 = 4$.

Alltså $S_6 = \dfrac{3(1-4^6)}{1-4} = \dfrac{3(1-4096)}{-3}$

$= 4095$

i (b) är $a=1$ och $q = \dfrac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{1} = -\frac{1}{2}$.

Alltså $S_6 = \dfrac{1\cdot\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^6\right)}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{2}{3}\left(1-\dfrac{1}{64}\right)$

$= \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{63}{64} = \dfrac{21}{32}$

Sats 13: Låt $a \in \mathbb{R}$ och $q \in]-1,1[$.

Då konvergerar den geometriska serien $\sum_{k=0}^{\infty} a q^k$ mot talet $\dfrac{a}{1-q}$, d.v.s. följden

S_1, S_2, S_3 konvergerar mot $\dfrac{a}{1-q}$, då $n \to \infty$.

Bevis: (enbart skiss, exakt på Analys I)

Eftersom $q \in]-1,1[$ så gäller $q^n \to 0$, då $n \to \infty$. Därmed gäller

$$\frac{-a}{1-q}\cdot q^n \longrightarrow 0, \text{ då } n\to\infty.$$

Således

$$S_n - \frac{a}{1-q} = \frac{a\cdot(1-q^n)}{1-q} - \frac{a}{1-q}$$

$$= -\frac{a q^n}{1-q} \to 0, \text{ då } n\to\infty.$$

och därmed $S_n \to \dfrac{a}{1-q}$ $\square$

$\frac{a}{1-q}$ kallas för summan av $\sum_{k=0}^{\infty} aq^k$.

Beteckning: $\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = \frac{a}{1-q}$

Exempel 14: Betrakta den geometriska talföljden $a_0, a_1, \ldots$ som börjar på följande sätt:

(a) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$

(b) $10^{100}, 10^{99}, 10^{98}, \ldots$

Bestäm $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ifall serien konvergerar.

(a) Kvoten: $q = \frac{a_1}{a_0} = \frac{1}{2}$. Enligt sats 10 så är $a_n = q^n a_0 = a_0 q^n$ för alla $n \in \mathbb{N}$.

Eftersom $q \in]-1,1[$ så gäller enligt sats 13:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_0 q^k = \frac{a_0}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

(b) Kvoten: $q = \frac{a_1}{a_0} = \frac{10^{99}}{10^{100}} = \frac{1}{10}$.

På motsvarande sätt som i (a) får vi:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_0 q^k = \frac{a_0}{1-q} = \frac{10^{100}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10^{100}}{(9/10)} = \frac{10^{101}}{9}$$

Binomialkoefficienter

Låt $X_0 = \emptyset$ och $X_n = \{1, \dots, n\}$ för alla $n \geq 1$.

För $k \in \mathbb{N}$ låter vi $\binom{n}{k}$ (läs "n över k")

beteckna antalet delmängder till X_n som har k element.

Tal $\binom{n}{k}$ där $n, k \in \mathbb{N}$ kallas för <u>binomialkoefficienter</u>.

<u>Exempel 15:</u> Vad är $\binom{3}{2}$, $\binom{3}{4}$, $\binom{8}{0}$, $\binom{8}{8}$.

Delmängderna till $X_3 = \{1,2,3\}$ med 2 element är $\underbrace{\{1,2\}, \{1,3\} \text{ och } \{2,3\}}_{3 \text{ st}}$. Alltså $\binom{3}{2} = 3$

X_3 har inga delmängder med 4 element. Alltså $\binom{3}{4} = 0$.

X_8 har en delmängd med 0 element, nämligen $\emptyset$, och en delmängd med 8 element, nämligen X_8.

Alltså $\binom{8}{0} = \binom{8}{8} = 1$.

Sats 16: För $n \in \mathbb{N}$ gäller

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

$$\left(\text{d.v.s. } \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \right)$$

Bevis: Eftersom X_n har n element, har $P(X_n)$ 2^n element.

Låt $A_k = \{ A \in P(X) \mid A \text{ har } k \text{ element} \}$ för varje $k = 0, 1, \dots, n$.

Då är $P(X_n) = A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_n$.
Nu är $\binom{n}{k}$ per definition antalet element i A_k.
I tillägg gäller $A_i \cap A_j = \emptyset$ för alla $i, j = 0, \dots, n$ då $i \neq j$.

Alltså $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$ □

Sats 17: (Pascals identitet)

Låt $n, k \in \mathbb{N}$ där $0 < k < n$. Då gäller

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Bevis: Skippas. Återkommer eventuellt senare. □

Ur Pascals identitet följer Pascals triangel:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \binom{0}{0} & & & & \\ & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\ & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\ & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\ \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\ & & & & \vdots & & & & \end{array}$$

$\rightsquigarrow$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ & & & & \vdots & & & & \end{array}$$

Notera symmetrin: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ för alla $n,k \in \mathbb{N}$, $0 \le k \le n$.

__Definition 18:__ Låt $n \in \mathbb{N}$. Fakultetet av n definieras rekursivt på följande sätt:

$$0! = 1,$$
$$(n+1)! = (n+1)\,n! \quad \text{för alla } n \geq 1.$$

($n!$ läses "n fakultet")

__Ex.__
$$\begin{aligned} 1! &= 1 \cdot 0! = 1 \cdot 1 = 1 \\ 2! &= 2 \cdot 1! = 2 \cdot 1 = 2 \\ 3! &= 3 \cdot 2! = 3 \cdot 2 = 6 \\ 4! &= 4 \cdot 3! = 4 \cdot 6 = 24 \end{aligned}$$

<u>Sats 19</u>: Låt $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Då är

$$n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$$

<u>Bevis</u>: Vi bevisar med induktion:

<u>Bassteg</u>: $n = 1$: $1! = 1 \cdot 0! = 1 \cdot 1 = 1$

<u>Induktionssteg</u>: Anta, att $k! = k(k-1) \cdots 2 \cdot 1$ för något $k \geq 1$

Då gäller $(k+1)! = (k+1)k! \overset{\text{i.a.}}{=} (k+1) \cdot k(k-1) \cdots 2 \cdot 1$

$\therefore$ På basis av ind. princ. så gäller $n! = n(n-1) \cdots 2 \cdot 1$ för alla $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.

<u>Sats 20</u>: Låt $n, k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$. Då gäller

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

<u>Bevis</u>: Induktion med avseende på n:

<u>Bassteg</u>: $n = 0$: $\binom{0}{0} = 1 = \frac{1}{1 \cdot 1} = \frac{0!}{0!0!}$

<u>Induktionssteg</u>: Vi antar att för något $m \in \mathbb{N}$ gäller

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!} \quad \text{för alla } k \in \mathbb{N}, k \leq m.$$

Vi visar att

$$\binom{m+1}{k} = \frac{(m+1)!}{k!(m+1-k)!} \quad \text{för alla } k \in \mathbb{N}, k \leq m+1$$

(i) $\binom{m+1}{m+1} = 1 = \frac{(m+1)!}{(m+1)!\,0!} = \frac{(m+1)!}{(m+1)!\,(m+1-(m+1))!}$

(ii) $\binom{m+1}{0} = 1 = \frac{(m+1)!}{0!\,(m+1)!} = \frac{(m+1)!}{0!\,(m+1-0)!}$

(iii) Låt $0<k<m+1$.

Då är $\binom{m+1}{k} = \binom{m}{k-1} + \binom{m}{k}$ (Pascals identitet)

$$\overset{\text{i.a.}}{=} \frac{m!}{(k-1)!\,(m-(k-1))!} + \frac{m!}{k!\,(m-k)!}$$

$$= \frac{k\,m!}{k(k-1)!\,(m+1-k)!} + \frac{m!\cdot(m+1-k)}{k!\,(m-k)!\,(m+1-k)}$$

$$= \frac{k\,m!}{k!\,(m+1-k)!} + \frac{m!\,(m+1-k)}{k!\,(m+1-k)!}$$

$$= \frac{k\,m! + (m+1-k)\,m!}{k!\,(m+1-k)!}$$

$$= \frac{(k+m+1-k)\,m!}{k!\,(m+1-k)!}$$

$$= \frac{(m+1)\,m!}{k!\,(m+1-k)!}$$

$$= \frac{(m+1)!}{k!\,(m+1-k)!}$$

$\therefore$ (i), (ii) & (iii): $\binom{m+1}{k} = \dfrac{(m+1)!}{k!(m+1-k)!}$

för alla $k \in \mathbb{N}$, $k \le m+1$.

$\therefore$ På basis av induktionsprincipen så gäller

$\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ för alla $n, k \in \mathbb{N}$, $k \le n$. $\square$

<u>Sats 21</u>: Låt $a, b \in \mathbb{R}$. Då gäller

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

<u>Bevis</u>: Skippas. Kan bevisas med induktion (något komplicerad) genom att använda Pascals identitet.

<u>Exempel 22</u>: Skriv ut $(x-1)^7$.

$$(x-1)^7 = \sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} x^{n-k} \cdot (-1)^k$$

$$= \binom{7}{0} x^7 \cdot (-1)^0 + \binom{7}{1} x^6 \cdot (-1)^1$$

$$+ \binom{7}{2} x^5 \cdot (-1)^2 + \binom{7}{3} x^4 \cdot (-1)^3$$

$$+ \binom{7}{4} x^3 \cdot (-1)^4 + \binom{7}{5} x^2 \cdot (-1)^5$$

$$+ \binom{7}{6} x^1 \cdot (-1)^6 + \binom{7}{7} x^0 \cdot (-1)^7$$

fre 1.11. $= x^7 - 7x^6 + 21x^5 - 35x^4 + 35x^3 - 21x^2 + 7x - 1$

Exempel 23: Vad är koefficienten framför termen x^7 i polynomet $(2+x)^{20}$?

Enligt sats 21 är koefficienten $\binom{20}{7}\cdot 2^{20-7}$

$$\overset{(\text{sats } 20)}{=} \frac{20!}{7!(20-7)!}\cdot 2^{13}$$

$$= \frac{20!}{7!\,13!}\cdot 2^{13}$$

$$= 19\cdot 17\cdot 15\cdot 2^{17}$$

Vi betecknar $\mathbb{R}_+ = \{x\in\mathbb{R} \mid x>0\}$

Definition: Låt $c\in\mathbb{R}_+$, och $a\in\mathbb{R}_+$. Logaritmen med basen a av talet c, $\underline{\log_a(c)}$, är det tal som a måste höjas med för att få c.

D.v.s. $a^{\log_a(c)} = c$.

Låt $t\in\mathbb{R}$. Då är alltså $\log_a(c) = t \Leftrightarrow a^t = c$

Detta tal t är entydigt, alltså är

$\log_a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $c \longmapsto \log_a(c)$ en funktion.

Vanliga baser: 2, $e\approx 2{,}718$ Nepers tal, 10.

Vi antar, att $c \in \mathbb{R}_+$, $a \in \mathbb{R}_+$ och $\log_a(c) = n$

där $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Då gäller

$$\log_a(c) = n \iff c = a^n \iff \frac{c}{a^n} = 1$$

Här är alltså $\log_a(c) = n$ antalet gånger man skall dividera c med a för att få talet 1.

<u>Exempel 24</u>: Bestäm följande logaritmer, eller deras närmevärde med division:

(a) $\log_2(8)$ (b) $\log_2(2)$

(c) $\log_2(20)$

(a) $\frac{8}{2} = 4$, $\frac{4}{2} = 2$, $\frac{2}{2} = 1$. Man måste alltså dividera 8 med 2 <u>tre</u> gånger för att få 1.

$\therefore \log_2(8) = 3$

(b) $\frac{2}{2} = 1$. Alltså $\log_2(2) = 1$

(c) $\frac{20}{2} = 10$, $\frac{10}{2} = 5$, $\frac{5}{2} = 2{,}5$

$\frac{2{,}5}{2} = 1{,}25$, $\frac{1{,}25}{2} = 0{,}625$

$\therefore \log_2(20) \approx 4$.

Exempel 25: Bestäm följande logaritmer med hjälp av ekvivalensen

$$\log_a(c) = t \Leftrightarrow a^t = c$$

(a) $\log_2(16)$

(b) $\log_3(27)$

(c) $\ln(1) = \log_e(1)$

(d) $\log_{10}\left(\frac{1}{100}\right)$

(a) $\log_2(16) = t \Leftrightarrow 2^t = 16$

Vi ser att $2^4 = 16$. Därmed är $\log_2(16) = 4$

(b) $\log_3(27) = t \Leftrightarrow 3^t = 27$.

Vi ser att $3^3 = 27$. Därmed är $\log_3(27) = 3$

(c) $\ln(1) = t \Leftrightarrow e^t = 1$.

Eftersom $e^0 = 1$ så är $\ln(1) = 0$.

(d) $\log_{10}\left(\frac{1}{100}\right) = t \Leftrightarrow 10^t = \frac{1}{100}$

Eftersom $10^{-2} = \frac{1}{100}$ så är $\log_{10}\left(\frac{1}{100}\right) = -2$.

Exempel 26: Lös följande ekvationer:

(a) $\log_2(x)=1$ (b) $\log_2(x)=4$

(c) $\log_2(x)=6,5$ (d) $\log_2(x)=-3$

(a) $\log_2(x)=1 \iff 2^1=x$. Alltså $\underline{x=2}$

(b) $\log_2(x)=4 \iff 2^4=x$. Alltså $\underline{x=16}$

(c) $\log_2(x)=6,5 \iff 2^{6,5}=x$.

Alltså $x=2^{6,5}=2^{6+0,5}=2^6\cdot 2^{\frac{1}{2}}=\underline{64\sqrt{2}}$

(d) $\log_2(x)=-2 \iff 2^{-2}=x$.

Alltså $x=2^{-3}=\frac{1}{2^3}=\underline{\frac{1}{8}}$

Kom ihåg följande regler: $a^x\cdot a^y=a^{x+y}$

$$(a^x)^y=a^{xy}$$

Vi får följande regler för logaritmer:

Låt $a,c\in\mathbb{R}_+$, $b\in\mathbb{R}$. Då är

(i) $\boxed{\log_a(c^b)=b\log_a(c)}$

eftersom $\log_a(c^b)=t \iff a^t=c^b$

$$\iff a^t=\Big(\underbrace{a^{\log_a(c)}}_{=c}\Big)^b$$

$$\iff a^t=a^{\log_a(c)\cdot b}$$

$$\iff t=b\log_a(t)$$

och $\boxed{\log_a(cd) = \log_a(c) + \log_a(d) \text{ då även } d \in \mathbb{R}_+}$ (ii)

eftersom $\log_a(cd) = t \Leftrightarrow a^t = cd$

$$\Leftrightarrow a^t = a^{\log_a(c)} \cdot a^{\log_a(d)}$$

$$\Leftrightarrow a^t = a^{\log_a(c) + \log_a(d)}$$

$$\Leftrightarrow t = \log_a(c) + \log_a(d).$$

(ii) ger även

- $\boxed{\log_a\left(\frac{c}{d}\right) = \log_a(c) - \log_a(d)}$
- $\boxed{\log_a(c^{-1}) = -\log_a(c)}$

Sats 27: (Basbyte) Låt $a, b \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$, $x \in \mathbb{R}_+$. Då gäller

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$

Bevis: $\log_b(x) = \log_b\left(a^{\log_a(x)}\right) = \log_a(x)\log_b(a)$

$$\Rightarrow \log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)} \qquad \square$$

Exempel 28: Lös $\log_2(x) + \log_2(x+6) = \log_2(16)$

- För att vänstra siden skall vara definierad, måste $x \in \mathbb{R}_+$.

Vi kan alltså anta, att $x \in \mathbb{R}_+$. Då gäller

$$\log_2(x) + \log_2(x+6) = \log_2(16) \Leftrightarrow \log_2(x(x+6)) = 4 \qquad (x>0)$$

$$\Leftrightarrow 2^4 = x(x+6)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 6x - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x+8) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

eftersom $x > 0$. $\therefore$ $\boxed{\text{Svar: } x = 2}$

Delbarhet

Definition: Låt $a, b \in \mathbb{Z}$. Om det existerar ett tal $q \in \mathbb{Z}$ så att

$a = qb$ så är a delbart med b.

Beteckning: $b \mid a$ "b delar talet a".

Om a inte är delbart med b, betecknar vi:

$b \nmid a$.

Ex. $7 \mid 49$ eftersom $49 = 7 \cdot 7$
$7 \nmid 50$ eftersom $50 = x \cdot 7 \Leftrightarrow x = \frac{50}{7} \notin \mathbb{Z}$
$n \mid 0$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ eftersom $0 = 0 \cdot n$ $\forall n \in \mathbb{Z}$

Sats 29 (Division med rest, finska "Jakoyhtälö")

Låt $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Då existerar exakt ett tal $q \in \mathbb{Z}$ och exakt ett tal $r \in \mathbb{Z}$, $0 \leq r < |b|$ så att

$$a = qb + r$$

Bevis: Bevisas i Algebra I $\square$

Talet r kallas för resten då man dividerar a med b.

Exempel 30: Vad är resten då man dividerar

(a) 21 (b) 25 (c) -7

med talet 5?

(a) $21 = 4 \cdot 5 + 1 \Rightarrow$ resten är 1

(b) $25 = 5 \cdot 5 + 0 \Rightarrow$ resten är 0

(c) $-7 = -2 \cdot 5 + 3 \Rightarrow$ resten är 3

Beteckning: $a \bmod b = r$ betecknar att resten då man dividerar a med b är r.

Alltså i exempel 30: (a) $21 \bmod 5 = 1$

(b) $25 \bmod 5 = 0$

(c) $-7 \bmod 5 = 3$

Exempel 31: Beräkna:

(a) $3 \bmod 2$ (b) $20 \bmod 4$

(c) $0 \bmod 3$ (d) $-1 \bmod 3$

(a) $3 = 1 \cdot 2 + 1 \Rightarrow 3 \bmod 2 = 1$

(b) $20 = 5 \cdot 4 + 0 \Rightarrow 20 \bmod 4 = 0$

(c) $0 = 0 \cdot 3 + 0 \Rightarrow 0 \bmod 3 = 0$

(d) $-1 = -1 \cdot 3 + 2 \Rightarrow -1 \bmod 3 = 2$

Definition: Låt $a, b \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Om $a \bmod n = b \bmod n$ så är a och b **kongruenta modulo n**.

Beteckning $a \equiv b \pmod{n}$.

Med andra ord: $a \equiv b \pmod{n}$ om och endast om

$\exists q_1, q_2, r \in \mathbb{Z}$, $0 \leq r < n$ så att

$a = q_1 n + r$ och
$b = q_2 n + r$

Exempel 32: $15 \equiv 59 \pmod{4}$ eftersom

$$\left.\begin{array}{l} 15 = 3 \cdot 4 + 3 \\ 59 = 14 \cdot 4 + 3 \end{array}\right\} \Rightarrow 15 \bmod 4 = 59 \bmod 4 = 3$$

Sats 33: Låt $a, b \in \mathbb{Z}$ och $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Då gäller

$a \equiv b \pmod{n}$ om och endast om $n \mid (a-b)$

Bevis: $\boxed{\Rightarrow}$ Övningsuppgift.

$\boxed{\Leftarrow}$ Anta, att $n \mid (a-b)$. Då $\exists k \in \mathbb{Z}$ så att

$a - b = kn$. Alltså $b = a - kn$.

Vi betecknar $r = a \bmod n$. Därmed gäller
$a = qn + r$ för något $q \in \mathbb{Z}$.

Därav
$b = a - kn = qn + r - kn = (q-k)n + r$

Här är $q - k \in \mathbb{Z}$ och $0 \leq r < n$. Alltså
$b \bmod n = r$.

$\therefore$ $a \bmod n = b \bmod n$ och därmed gäller $a \equiv b \pmod{n}$

<u>Sats 34</u>: Låt $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$, $k,n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.
Anta, att $a \equiv b \pmod n$ och
$c \equiv d \pmod n$

Då gäller (a) $a+c \equiv b+d \pmod n$

(b) $ac \equiv bd \pmod n$

(c) $a^k \equiv b^k \pmod n$

<u>fre 22.11</u>

<u>Bevis</u>: Endast (a)-delen: ((b) och (c) övningsuppgifter)

Antagandet $\Rightarrow$ $\exists q_1, q_2, r \in \mathbb{Z}$, $0 \leq r < n$
så att
$$a = q_1 n + r$$
$$b = q_2 n + r$$

och $\exists p_1, p_2, s \in \mathbb{Z}$, $0 \leq s < n$
så att
$$c = p_1 n + s$$
$$d = p_2 n + s$$

Vi får
$$a+c = q_1 n + r + p_1 n + s = (p_1 + q_1) n + r + s$$
$$b+d = q_2 n + r + p_2 n + s = (p_2 + q_2) n + r + s$$

och därmed

$$a+c-(b+d) = \underbrace{(p_1+q_1-(p_2+q_2))}_{\in \mathbb{Z}} n$$

Alltså $n \mid (a+c-(b+d))$

och därmed $a+c \equiv b+d \pmod n$ enligt sats 33.

Exempel 35: Räkna $590 + 6^{100} \mod 7$

$590 = 59 \cdot 10$

$59 = 8 \cdot 7 + 3 \Rightarrow 59 \mod 7 = 3$

$10 = 1 \cdot 7 + 3 \qquad 10 \mod 7 = 3$

Sats 34 b) $\Rightarrow$ $590 = 59 \cdot 10 \equiv 3 \cdot 3 \pmod 7$

$\equiv 2 \pmod 7$

(eftersom $3 \cdot 3 = 9 = 1 \cdot 7 + \underline{2}$)

Alltså $590 \equiv 2 \pmod 7$

$6 \equiv -1 \pmod 7$ eftersom $7 \mid 6 - (-1) = 7$

Sats 34 c) $\Rightarrow$ $6^{100} \equiv (-1)^{100} \pmod 7$

Alltså $6^{100} \equiv 1 \pmod 7$

Sats 34 a) $\Rightarrow$ $590 + 6^{100} \equiv 2 + 1 \pmod 7$

d.v.s. $590 + 6^{100} \equiv 3 \pmod 7$