Homotopia ja vektorikimput
Harj. 9 ; Ratkaisuja.

1. (Ongelma lausekkeessa $p(t) = x\cos t + v\sin t$: saattaa olla $p(t) \notin S^n$)
Osoitetaan, että lauseke
$$p(t) = x\cos(\|v\|t) + \frac{v}{\|v\|}\sin(\|v\|t), \quad v \neq \bar{0}$$
toimii:
- $\|p(t)\|^2 = p(t)\cdot p(t)$
$$= \cos^2(\|v\|t)\underbrace{x\cdot x}_{=\|x\|^2=1} + 2\frac{v}{\|v\|}\sin(\|v\|t)\cos(\|v\|t)\underbrace{x\cdot v}_{=0,\ \text{koska } x\perp v} + \frac{1}{\|v\|^2}\sin^2(\|v\|t)\,v\cdot v$$
$$= \cos^2(\|v\|t) + \frac{1}{\|v\|^2}\sin^2(\|v\|t)\,\|v\|^2 = \cos^2(\|v\|t) + \sin^2(\|v\|t) = 1.$$
Siis $p(t) \in S^n \ \forall t$.
- $p(0) = x$ ok.
- $p'(t) = x\cdot(-\sin(\|v\|t))\cdot\|v\| + \frac{v}{\|v\|}\cos(\|v\|t)\cdot\|v\|$,
joten $p'(0) = v$ ok.

Sitten varsinainen väite:
$$T_x S^n = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid v \perp x\}$$

"$\subset$" osoitettiin Harj. 8/Teht. 5 a)
"$\supset$" olk. $v \in \mathbb{R}^{n+1}$, $v \perp x$.
Jos $v = \bar{0}$, void. val. vakiopolku $p(t) \equiv x$, jolloin $p'(0) = v$
eli $v \in T_x S^n$.
Jos $v \neq \bar{0}$, yllaoleva kaava antaa halutun polun, joten $v \in T_x S^n$. $\square$

2. a) $g_{kj}(x)$ on matriisi, joka vastaa lin. kuvausta $h_k^{-1}\circ h_j$,
$g_{ji}(x)$ on matriisi, joka vastaa lin. kuvausta $h_j^{-1}\circ h_i$,
jolloin tulomatriisi $g_{kj}(x)\cdot g_{ji}(x)$ vastaa näiden yhdistettä
$$(h_k^{-1}\circ h_j)\circ(h_j^{-1}\circ h_i) = h_k^{-1}\circ h_i,$$
jonka matriisi on $g_{ki}(x)$.

b) <u>Refl.</u> $(x,v,i)\sim(x,v,i)$, koska $x = x$ ja $\overbrace{g_{ii}(x)}^{id} v = v$

<u>Symm.</u> ol. $(x,v,i)\sim(x',v',j)$ eli $x = x'$ ja $\underbrace{g_{ji}(x)}_{=(g_{ij}(x))^{-1}} v = v'$,
josta saadaan $x' = x$ ja $g_{ij}(x)v' = v$
eli $(x',v',j)\sim(x,v,i)$.

Trans. ol. $(x,v,i) \sim (x',v',j)$ eli $x = x'$ ja $g_{ji}(x)v = v'$;
ol. $(x',v',j) \sim (x'',v'',k)$ eli $x' = x''$ ja $g_{kj}(\underbrace{x'}_{=x})v' = v''$.
Tällöin $x = x''$ ja

$$v'' = g_{kj}(x)v' = g_{kj}(x) \cdot g_{ji}(x)v \underset{a)}{=} g_{ki}(x)v$$

Siis

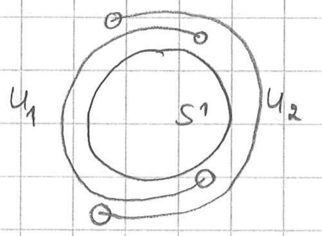
$$(x,v,i) \sim (x'',v'',k).$$

$\square$

Lisäys a)-kohtaan:

selvästi $g_{ii}(x) =$ yksikkömatriisi $I_n \in Gl(n,\mathbb{R})$;
lisäksi $g_{ij}(x) \cdot g_{ji}(x) \underset{a)}{=} g_{ii}(x) = I_n \Rightarrow g_{ij}(x) = (g_{ji}(x))^{-1}$.

3.



Olk. $\{U_1, U_2\}$ S^1:n avoin peite kuten kuvassa. Leikkauksella $U_1 \cap U_2$ on kaksi komponenttia, merk. näitä V ja W.
Määritellään $g_{12}: U_1 \cap U_2 \to Gl(1,\mathbb{R}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
s.e. $g_{12}(x) = 1$, kun $x \in V$,
$g_{12}(x) = -1$, kun $x \in W$.

Joukossa $V \times \mathbb{R}$ tehdään siis samastukset

$$\underset{\in U_1 \times \mathbb{R}}{(x,t)} \sim \underset{\in U_2 \times \mathbb{R}}{(x,t)}$$

ja joukossa $W \times \mathbb{R}$

$$\underset{\in U_1 \times \mathbb{R}}{(x,t)} \sim \underset{\in U_2 \times \mathbb{R}}{(x,-t)}$$

ja saadaan Möbiuksen nauha.

4. Pidetään tunnettuna, että tuloavaruuden projektio $X \times Y \to X$ on aina avoin kuvaus.
Olk. $p: E \to B$ vektorikimpun projektio. Riittää osoittaa, että jokaisella pisteellä on ympäristö, johon rajoitettuna p on avoin kuvaus. Valitaan tällaiseksi $\pi^{-1}(U)$, missä $U \subset B$ on koordinaattiympäristö, eli
$\exists$ homeomorfismi $U \times \mathbb{R}^n \xrightarrow[\approx]{h} \pi^{-1}U$
s.e. kaavio kommutoi

$$\begin{tikzcd} U \times \mathbb{R}^n \arrow[rr, "h", "\approx"'] \arrow[dr, "pr_1"'] & & \pi^{-1}U \arrow[dl, "\pi"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

Jos $a \in \pi^{-1}U$, niin $\pi(a) = \underbrace{\pi \circ h}_{=pr_1} \circ h^{-1}(a) = pr_1(h^{-1}(a))$,

joten $\pi = pr_1 \circ h^{-1}$. Koska pr_1 on avoin kuvaus ja h^{-1} on avoin kuvaus (homeomorfismina), on π avoin kuvaus.

$\square$

5. olk. $b \in B_1$ kiinteä; määritellään $h = \hat{f}| : \pi_1^{-1}(b) \to \pi^{-1}(f(b))$
$$(b,e) \mapsto e$$

- h hyvin määr.: jos $(b,e) \in \pi_1^{-1}(b)$, on silloin E_1:n määritelmän nojalla $f(b) = \pi(e)$, josta seuraa $e \in \pi^{-1}(f(b))$ ok.
- h injektio: selvä, koska b on kiinteä
- h surjektio: olk. $e \in \pi^{-1}(f(b))$. Tällöin siis $\pi(e) = f(b)$ ja E_1:n määr. nojalla $(b,e) \in E_1$ ja siis $(b,e) \in \pi_1^{-1}(b)$.
  Nyt $h(b,e) = e$, joten h on surjektio.
- jatkuvuus selvä, koska h on projektion $B_1 \times E \to E$ rajoittuma
- h^{-1} on kuvauksen $E \to B_1 \times E$, $e \mapsto (b,e)$ rajoittuma, joten myös h^{-1} on jatkuva.

6.
- varmistetaan ensin, että $(b, h(f(b),x)) \in E_1$:
  nyt $h(f(b),x) \in \pi^{-1}(f(b))$, joten $\pi(h(f(b),x)) = f(b)$,
  eli E_1:n määritelmän ehto toteutuu
- Koska $\pi_1(b, h(f(b),x)) = b \in U_1$, on $(b, h(f(b),x)) \in \pi_1^{-1}(U_1)$
- h_1 jatkuva, ok.
- h_1 isomorfismi säikeillä: olk. $b \in U_1$ kiinteä.
$$\{b\} \times \mathbb{R}^n \to \{b\} \times F_{f(b)} = \pi_1^{-1}(b) = F_b(f^*(\xi))$$
$$(b,x) \longmapsto (b, h(f(b),x))$$
  isomorfismi 2. koordinaatilla, koska h isom. $\mathbb{R}^n \to F_{f(b)}$

Lisäksi vektoriavaruusstruktuuri säikeellä $F_b(f^*(\xi))$ oli määritelty bijektion $F_b(f^*(\xi)) \to F_{f(b)}$ avulla.
$$(b,e) \longmapsto e$$
Siis saad. isomorfismi $\mathbb{R}^n \to F_b(f^*(\xi))$.

- käänteiskuvaus $h_1^{-1} : \pi_1^{-1}(U_1) \to U_1 \times \mathbb{R}^n$
$$(b,e) \longmapsto (b, pr_2(h^{-1}e)).$$
  Jos $(b,e) \in \pi_1^{-1}(U_1)$, on siis $\pi_1(b,e) = b \in U_1$ eli $f(b) \in U$.
  Lisäksi $f(b) = \pi(e)$ eli $e \in \pi^{-1}f(b) \in \pi^{-1}U$. Siis $h^{-1}e$ on määritelty ja $h^{-1}e \in U \times \mathbb{R}^n$ ja $pr_2(h^{-1}e) \in \mathbb{R}^n$. Siis $(b, pr_2(h^{-1}e)) \in U_1 \times \mathbb{R}^n$.
- h:n jatkuvuus ok.
- $h_1^{-1} \circ h_1(b,x) = h_1^{-1}(b, h(f(b),x)) = (b, pr_2(h^{-1}(h(f(b),x))))$
$$= (b, pr_2(f(b),x)) = (b,x).$$
- $h_1 \circ h_1^{-1}(b,e) = h_1(b, pr_2(h^{-1}e)) = (b, \underbrace{h(f(b), pr_2(h^{-1}e))}_{= h^{-1}e,\ \text{koska } e \in \pi^{-1}(f(b))}) = (b,e).$

$\square$