Homotopia ja vektorikimput
Harjoitus 8 (6.11.2014)

1. a) Osoita, että vektorikimpulla on aina n.s. nollasektio (eli $s(b)$ on säikeen F_b nollavektori $\forall b$).
   b) Jos $\bar{v} \neq \bar{0}$, miksi ei yleisesti ole mahdollista konstruoida "$\bar{v}$-sektiota"?

2. Olkoon $h : U \to M$ sileän moniston $M \subset \mathbb{R}^k$ koordinaattikuvaus, $U \subset \mathbb{R}^n$. Osoita, että h on diffeomorfismi $U \to h(U)$.

3. Osoita, että posit. definiitti neliömuoto $\mu : V \to \mathbb{R}$ määrittelee sisätulon kaavalla
$$v \cdot w = \frac{1}{2}\left(\mu(v+w) - \mu(v) - \mu(w)\right).$$

4. (Kts. Seuraus 3.15, s. 47)
   a) Osoita: jos $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ on lineaarisesti riippumaton jono avaruuden $\mathbb{R}^{n+k}$ vektoreita ($k \geq 0$) ja $\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_{n+k}$ on vektoriavaruuden $\mathbb{R}^{n+k}$ kanta, niin vektoreista $\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_{n+k}$ voidaan valita k kpl s.e. nämä yhdessä vektorien $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ kanssa muod. $\mathbb{R}^{n+k}$:n kannan.
   b) Palauta Lin. alg. kurssilta mieleen (anna viite luentomonisteen sopiviin kohtiin tms.): olk. A $(n \times n)$-matriisi.
   A on kääntyvä
   $\Leftrightarrow$ A:n sarakkeet ovat lin. riippumattomia
   $\Leftrightarrow$ A:n sarakevektorit muod. $\mathbb{R}^n$:n kannan
   $\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$.

5. Tarkastellaan taas palloa $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.
   a) Osoita, että $\bar{x} \perp T_{\bar{x}} S^n \quad \forall \bar{x} \in S^n$.
   b) Osoita, että normaalikimppu S^n ($\subset \mathbb{R}^{n+1}$) on triviaali kimppu.

6. Osoita, että pallolla S^{2n-1} on ei-missään-häviävä vektorikenttä, $n \in \{1, 2, \dots\}$.
Vihjeitä: - S^{2n-1} on avaruuden $\mathbb{C}^n \approx \mathbb{R}^{2n}$ yksikköpallo
- kts. Esim. 3.10 a)
- Pidetään tunnettuna: $T_{\bar{x}} S^n = \{\bar{v} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \bar{v} \perp \bar{x}\}$