Homotopia ja vektorikimput, Harj. 8
Ratkaisuja

1. a) Jokaisella $b \in B$ säikeellä F_b on vektoriavaruuden struktuuri. Vektoriavaruudessa nollavektori on yksikäsitteinen, joten saadaan hyvinmääritelty funktio $s: B \to E$, $s(b) = \bar{0} \in F_b$.
Jatkuvuus: olk. $b_0 \in B$, U b_0:n karttaympäristö ja $h: U \times \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}U$ karttakuvaus. Jokaisella $b \in U$, $h(b, \bar{0})$ = vektoriavaruuden F_b nollavektori, koska $h|_{\{b\}\times\mathbb{R}^n}$ on lineaarikuvaus. Siis $s|$ on yhdistetty kuvaus

$$s|: U \to U \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{h} \pi^{-1}(U)$$
$$b \mapsto (b, \bar{0}) \longmapsto h(b,\bar{0}) = s(b),$$

eli jatkuva U:ssa.
Siis s on jatkuva jokaisen pisteen jossakin ympäristössä, eli s on jatkuva. $\square$

b) Nollavektori on ainoa vektori, jolla on a-kohdassa käytetty yksikäsitteisyysominaisuus. (Esim. tapauksessa $\mathbb{R}^1$, jos $a, b \neq 0$, niin $\exists$ lin. isomorfismi, jolle $f(a) = b$, nimittäin $f(t) = \frac{b}{a} t$.)
Lokaalisti saadaan aina määriteltyjä sektioita karttakuvausten avulla kuten yllä: $b \mapsto (b, \bar{v}) \longmapsto h(b,\bar{v})$ ($\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ mikä tahansa), mutta näitä funktioita ei aina saa "liimattua yhteen" kuvaukseksi $B \to E$; vrt. Möbius-nauha-esimerkki (Lause 3.5, Esim. 3.6).

2. $h: U \to h(U)$ on sileä bijektio Määr. 2.6 nojalla.
Riittää siis osoittaa, että h^{-1} on sileä; Määr. 2.14 nojalla siis täytyy löytää koordinaatisto h', jolle $h^{-1} \circ h'$ on sileä.
Voidaan valita $h' = h$; nimittäin $h^{-1} \circ h = id: U \to U$ on sileä. $\square$

3. Olk. $\mu: V \to \mathbb{R}$, $\mu(v) = \sum_{i=1}^{k} l_i(v) l_i'(v)$, missä $l_i, l_i': V \to \mathbb{R}$ ovat lineaarisia;
$v \cdot w = \frac{1}{2}(\mu(v+w) - \mu(v) - \mu(w))$.

1° Symmetrisyys: $v \cdot w = \frac{1}{2}(\mu(v+w) - \mu(v) - \mu(w)) = \frac{1}{2}(\mu(w+v) - \mu(w) - \mu(v)) = w \cdot v$.

2° Bilineaarisuus: Summa:

① $(v+v') \cdot w = \frac{1}{2}\left(\mu((v+v')+w) - \mu(v+v') - \mu(w)\right)$
$= \frac{1}{2}\sum l_i(v+v'+w) l_i'(v+v'+w) - l_i(v+v') l_i'(v+v') - l_i(w) l_i'(w)$
$= \frac{1}{2}\sum (l_i(v+v') + l_i(w)) \cdot (l_i'(v+v') + l_i'(w)) - l_i(v+v') l_i'(v+v') - l_i(w) l_i'(w)$
$= \frac{1}{2}\sum \cancel{l_i(v+v') l_i'(v+v')} + l_i(v+v') l_i'(w) + l_i(w) l_i'(v+v') + \cancel{l_i(w) l_i'(w)} - \cancel{l_i(v+v') l_i'(v+v')} - \cancel{l_i(w) l_i'(w)}$
$= \frac{1}{2}\sum (l_i(v) + l_i(v')) \cdot l_i'(w) + l_i(w) \cdot (l_i'(v) + l_i'(v'))$
$= \frac{1}{2}\sum l_i(v) l_i'(w) + l_i(v') l_i'(w) + l_i(w) l_i'(v) + l_i(w) l_i'(v')$

② $v\cdot w + v'\cdot w = \frac{1}{2}\left(\mu(v+w)-\mu(v)-\mu(w)\right) + \frac{1}{2}\left(\mu(v'+w)-\mu(v')-\mu(w)\right)$

$= \frac{1}{2}\sum l_i(v+w)\,l_i'(v+w) - l_i(v)\,l_i'(v) - l_i(w)\,l_i'(w)$

$+ l_i(v'+w)\,l_i'(v'+w) - l_i(v')\,l_i'(v') - l_i(w)\,l_i'(w)$

$= \frac{1}{2}\sum \cancel{l_i(v)\,l_i'(v)} + l_i(v)\,l_i'(w) + l_i(w)\,l_i'(v) + \cancel{l_i(w)\,l_i'(w)} - \cancel{l_i(v)\,l_i'(v)} - \cancel{l_i(w)\,l_i'(w)}$

$+ \cancel{l_i(v')\,l_i'(v')} + l_i(v')\,l_i'(w) + l_i(w)\,l_i'(v') + \cancel{l_i(w)\,l_i'(w)} - \cancel{l_i(v')\,l_i'(v')} - \cancel{l_i(w)\,l_i'(w)}$

$= \frac{1}{2}\sum l_i(v)\,l_i'(w) + l_i(w)\,l_i'(v) + l_i(v')\,l_i'(w) + l_i(w)\,l_i'(v')$

Huomataan, että ① = ② eli $(v+v')\cdot w = v\cdot w + v'\cdot w$.

Vastaava yhtälö toisen muuttujan suhteen seuraa käyttämällä 1°-kohdassa todistettua symmetrisyyttä ja yllä todistettua lineaarisuutta 1. muuttujan suhteen:

$v\cdot(w+w') = (w+w')\cdot v = w\cdot v + w'\cdot v = v\cdot w + v\cdot w'$.

Tulo: olk. $c\in\mathbb{R}$

① $(cv)\cdot w = \frac{1}{2}\left(\mu(cv+w) - \mu(cv) - \mu(w)\right)$

$= \frac{1}{2}\sum l_i(cv+w)\,l_i'(cv+w) - l_i(cv)\,l_i'(cv) - l_i(w)\,l_i'(w)$

$= \frac{1}{2}\sum \cancel{l_i(cv)\,l_i'(cv)} + l_i(cv)\,l_i'(w) + l_i(w)\,l_i'(cv) + \cancel{l_i(w)\,l_i'(w)}$

$- \cancel{l_i(cv)\,l_i'(cv)} - \cancel{l_i(w)\,l_i'(w)}$

$= \frac{1}{2}\sum c\,l_i(v)\,l_i'(w) + l_i(w)\,c\,l_i'(v) = \frac{1}{2}c\sum l_i(v)\,l_i'(w) + l_i(w)\,l_i'(v)$.

② $c\cdot(v\cdot w) = \frac{1}{2}c\left(\mu(v+w) - \mu(v) - \mu(w)\right)$

$= \frac{1}{2}c\sum l_i(v+w)\,l_i'(v+w) - l_i(v)\,l_i'(v) - l_i(w)\,l_i'(w)$

$= \frac{1}{2}c\sum \cancel{l_i(v)\,l_i'(v)} + l_i(v)\,l_i'(w) + l_i(w)\,l_i'(v) + \cancel{l_i(w)\,l_i'(w)}$

$- \cancel{l_i(v)\,l_i'(v)} - \cancel{l_i(w)\,l_i'(w)}$

$= \frac{1}{2}c\sum l_i(v)\,l_i'(w) + l_i(w)\,l_i'(v)$

Huomataan, että ① = ② eli $(cv)\cdot w = c(v\cdot w)$.

Lisäksi $v\cdot(cw) = (cw)\cdot v = c(w\cdot v) = c(v\cdot w)$.

3° $v\cdot v \geq 0\ \forall v\in V$ ja $v\cdot v = 0 \Leftrightarrow v = \bar{0}$:

$v\cdot v = \frac{1}{2}\left(\mu(v+v) - \mu(v) - \mu(v)\right) = \ldots =$

$= \frac{1}{2}\sum 4 l_i(v)\,l_i'(v) - l_i(v)\,l_i'(v) - l_i(v)\,l_i'(v)$

$= \sum l_i(v)\,l_i'(v) = \mu(v)$,

joten väite seuraa siitä, että μ on posit. definiitti

$(\mu(\bar{0}) = 0$ ja $\mu(v) > 0\ \forall v\neq\bar{0})$.

4. a) Tod. Tapaus $k=0$ on selvä: tällöin vektorit $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ ovat avaruuden $\mathbb{R}^{n+k} = \mathbb{R}^n$ kanta, ja lisää vektoreita ei tarvita.

Olk. nyt $k \geq 1$.

Oletuksista seuraa, että löytyy jokin vektoreista $\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_{n+k}$, jota ei voida lausua vektorien $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ lin. kombinaationa:

jos jokainen vektoreista $\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_{n+k}$ voitaisiin lausua $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ lin. komb., niin $\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_{n+k} \in \operatorname{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)$, ja siis $\operatorname{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n) = \operatorname{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n, \bar{w}_1, \dots, \bar{w}_{n+k})$, ristiriita, koska $\dim \nearrow = n$ ja $\dim \nearrow = n+k > n$.

Valitaan tällainen $\bar{w}_{i_1}$. Nyt jono $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n, \bar{w}_{i_1})$ on vapaa.

Jos $k=1$, tämä on $\mathbb{R}^{n+k}$:n kanta ja olemme valmiit.

Jos $k>1$, valitaan vektori $\bar{w}_{i_2}$ kuten edellä, ja saadaan vapaa jono $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n, \bar{w}_{i_1}, \bar{w}_{i_2})$.

(siis $\bar{w}_{i_2}$, jota ei voi lausua vekt. $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n, \bar{w}_{i_1}$ lin. kombinaationa)

Näin jatketaan, kunnes on valittu k vektoria ja saadaan vapaa jono $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n, \bar{w}_{i_1}, \dots, \bar{w}_{i_k})$, joka on $\mathbb{R}^{n+k}$:n kanta (koska se on vapaa jono, jossa on $n+k$ vektoria).

$\square$

Kts. myös [Honkasalo: Lin.alg., Lause 2.5.10]

b) $\det(A) \neq 0$

$\overset{\text{L. 5.2.4}}{\iff}$ A on kääntyvä eli säännöllinen

$\overset{\text{L. 2.7.4}}{\iff}$ $\operatorname{rank}(A) = n$

$\overset{\text{H. 2.7.1}}{\iff}$ $\dim \operatorname{Col}(A) = n$

$\overset{\dim(\mathbb{R}^n)=n}{\iff}$ A:n sarakevektorit virittävät $\mathbb{R}^n$:n

vektoreita n kpl, $\dim(\mathbb{R}^n)=n$ $\iff$ & L. 2.5.14 b) A:n sarakevektorit muod. $\mathbb{R}^n$:n kannan

vektoreita n kpl, $\dim(\mathbb{R}^n)=n$ $\iff$ & L. 2.5.14 a) A:n sarakevektorit ovat lin. riippumattomia eli muod. vapaan jonon.

$\square$

5. a) Olk. $\bar{x} \in S^n$ ja $\bar{v} \in T_{\bar{x}} S^n$.
valitaan polku $p: (-\varepsilon, \varepsilon) \to S^n$ s.e. $p(0) = \bar{x}$ ja $p'(0) = \bar{v}$.
$\overset{\shortparallel}{(p_1, \dots, p_{n+1})}$

Nyt $\|p(t)\|^2 = 1 \quad \forall t$ eli $(p_1(t))^2 + \dots + (p_n(t))^2 = 1$.
Derivoidaan:

$$2p_1(t)p_1'(t) + \dots + 2p_{n+1}(t)p_{n+1}'(t) = 0$$
$$\Rightarrow \quad 2 \cdot (p(t) \cdot p'(t)) = 0$$
$$(t=0) \quad \Rightarrow \quad p(0) \cdot p'(0) = 0$$
$$\Rightarrow \quad \bar{x} \cdot \bar{v} = 0 \quad \text{eli} \quad \bar{x} \perp \bar{v}.$$

$\square$

b) Koska $\dim(\mathbb{R}^{n+1}) = n+1$ ja $\dim(T_{\bar{x}} S^n) = n$,
on normaalikimpussa säikeen dimensio $(n+1) - n = 1$.
Lauseen 3.9 nojalla riittää konstruoida sektio, joka ei häviä missään (Lauseen 3.9 luku n on tässä 1).
a)-kohdan nojalla $\bar{x} \perp T_{\bar{x}} S^n$ eli $\bar{x}$ virittää normaalikimpun säikeen (Huom. $\bar{x} \neq \bar{0}$, koska $\bar{x} \in S^n$).
Esim. 3.3 c): $E = \{(\bar{x}, \bar{v}) \mid \bar{v} \perp T_{\bar{x}} S^n\} \subset \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$
ja sektioksi voidaan valita

$$s: S^n \to E$$
$$\bar{x} \longmapsto (\bar{x}, \bar{x}),$$

joka on selvästi jatkuva eikä häviä millään $\bar{x}$:n arvolla.

6. Määritellään $s: \underset{\subset \mathbb{R}^{2n}}{S^{2n-1}} \longrightarrow \underset{\subset \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}}{T(S^{2n-1})}$

kaavalla $z = (z_1, \dots, z_n) \longmapsto (z_1, \dots, z_n, iz_1, \dots, iz_n)$
eli $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) \mapsto (x_1, y_1, \dots, x_n, y_n, -y_1, x_1, \dots, -y_n, x_n)$.
Nyt $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) \cdot (-y_1, x_1, \dots, -y_n, x_n) = 0$,
joten $(z_1, \dots, z_n) \perp (iz_1, \dots, iz_n)$, josta seuraa (vihjeen nojalla) että $(iz_1, \dots, iz_n) \in T_z(S^{2n-1})$.
Siis s on hyvin määritelty (arvot $\in T(S^{2n-1})$).

Selvästi s on jatkuva ja koordinaateista $iz_1, \dots, iz_n$ ainakin yksi on $\neq 0$, koska koordinaateista $z_1, \dots, z_n$ ainakin yksi on $\neq 0$ ($z \in S^{2n-1}$).

Siis s on ei-missään häviävä vektorikenttä.

$\square$