Homotopia ja vektorikimput
Harj. 7
Ratkaisuja

1. a) olk. $x \in M$ ($M \subset \mathbb{R}^k$), Määr. 2.6 $\Rightarrow \exists$ sileä funktio $h : U \to \mathbb{R}^k$ ($U \overset{\circ}{\subset} \mathbb{R}^n$), joka on homeomorfismi x:n avoimelle ympäristölle $V \subset M$. Voidaan olettaa, että $\bar{0} \in U$ ja $h(\bar{0}) = x$ (tarvittaessa voidaan yhdistää h ja translaatio $t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, joka on diffeomorfismi; $h \circ t$ on tällöin ehdon täyttävä koordinaatistokuvaus).
Nyt selvästi pätee $id \circ h = h : U \to M \to M \subset \mathbb{R}^k$ on sileä, joten Määritelmän 2.14 ehto pätee. Siis id on sileä pisteessä x.
x mielivalt. $\Rightarrow$ id sileä. □

b) ol. $g : M \to M'$, $f : M' \to M''$ sileitä ($M \subset \mathbb{R}^k$, $M' \subset \mathbb{R}^l$, $M'' \subset \mathbb{R}^m$).
olk. $x \in M$;
$h : U \to M$, $h(0) = x$, $U \overset{\circ}{\subset} \mathbb{R}^{k'}$ s.e. $g \circ h : U \to M \to M' \subset \mathbb{R}^l$ on sileä;
$\bar{h} : V \to M'$, $\bar{h}(0) = g(x)$, $V \overset{\circ}{\subset} \mathbb{R}^{l'}$ s.e. $f \circ \bar{h} : V \to M' \to M'' \subset \mathbb{R}^m$ on sileä.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[d, "h"'] & V \arrow[d, "\bar{h}"] & \\ M \arrow[r, "g"] & M' \arrow[r, "f"] & M'' \end{tikzcd}$$

Vastaavasti kuten Lauseen 2.11 todistuksessa saadaan, että $\bar{h}^{-1} \circ g \circ h : U \to V$ on sileä (Lauseen 2.11 p vastaa tässä $g \circ h$).
(Oikeastaan määr. joukko ei ole välttämättä koko U, vaan $U \cap h^{-1} g^{-1}(\bar{h} V) \overset{\circ}{\subset} \mathbb{R}^{k'}$).
Siis $(f \circ g) \circ h = \underbrace{(f \circ \bar{h})}_{\text{sileä}} \circ \underbrace{(\bar{h}^{-1} \circ g \circ h)}_{\text{sileä}}$ on sileä (Lause 2.2).
$\Rightarrow$ $f \circ g$ sileä pist. x. x mielivalt. $\Rightarrow$ $f \circ g$ sileä.

(Huom. ketjusäännön käyttämistä varten tarvittiin, että funktioiden $f \circ \bar{h}$ ja $\bar{h}^{-1} \circ g \circ h$ määr. joukot ovat eukl. avaruuden avoimia osajoukkoja; tämän takia tarvittiin koord. kuvausta $\bar{h}$).

□

2. Olk. $v \in T_x M$ ja $p, \bar{p} : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ polkuja, joille $\frac{dp}{dt}(0) = \frac{d\bar{p}}{dt}(0) = v$.

Olk. $h: U \to M$ koordinaatisto s.e. $f \circ h : U \to M \to N \subset \mathbb{R}^\ell$ on sileä.

Kuten Lauseen 2.11 todistuksessa:

$$h^{-1} \circ p : (-\varepsilon, \varepsilon) \to h(u) \to U \quad \text{on sileä.}$$

Nyt

$$\frac{d(f \circ p)}{dt}(0) = D(f \circ p)(0) = D\big((f \circ h) \circ (h^{-1} \circ p)\big)(0)$$
$$= D(f \circ h)(0) \circ D(h^{-1} \circ p)(0)$$

ja vastaavasti

$$\frac{d(f \circ \bar{p})}{dt}(0) = \dots = D(f \circ h)(0) \circ D(h^{-1} \circ \bar{p})(0),$$

joten riittää osoittaa, että $D(h^{-1} \circ p)(0) = D(h^{-1} \circ \bar{p})(0)$.

Olk. $p = (p_1, \dots, p_k)$, $\bar{p} = (\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_k)$, jolloin

$$p'(0) = (p_1'(0), \dots, p_k'(0)) = (\bar{p}_1'(0), \dots, \bar{p}_k'(0)) = v.$$

Olk. $k_1, \dots, k_n$ kuten Lauseen 2.11 todistuksessa, ja merk.

$pr : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, $(x_1, \dots, x_k) \mapsto (x_{k_1}, \dots, x_{k_n})$.

Nyt $(pr \circ p)'(0) = (p_{k_1}'(0), \dots, p_{k_n}'(0)) = (\bar{p}_{k_1}'(0), \dots, \bar{p}_{k_n}'(0))$. $(*)$

Olk. myös $g = (g_1, \dots, g_n)$ kuten funktio f Lauseessa 2.11, eli

$$h^{-1} = g \circ pr \quad \text{jossakin } x\text{:n ympäristössä.}$$

(g on määritelty jossakin $\bar{0}$:n ympäristössä $\mathbb{R}^n$:ssä)

$$D(h^{-1} \circ p)(0) = D\big(g \circ (pr \circ p)\big)(0) = Dg(0) \circ (pr \circ p)'(0)$$
$$D(h^{-1} \circ \bar{p})(0) = \dots = Dg(0) \circ (pr \circ \bar{p})'(0)$$

samat $(*)$:n nojalla.

$\square$

3. olk. $v = \sum_i c_i \frac{\partial h}{\partial u_i}(0)$; valitaan p s.e. $p'(0) = v$.

Kuten Lauseen 2.11 todistuksessa, voidaan valita $p = h \circ w$,

missä $w : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$, $w(t) = (c_1 t, \dots, c_n t)$,

jolloin

$$Tf_x(v) = \frac{d(f \circ p)}{dt}(0) = \frac{d((f \circ h) \circ w)}{dt}(0)$$

$$= D(f \circ h)(0) \circ Dw(0) = \dots = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{\partial (f \circ h)}{\partial u_i}(0).$$

Kuten Harj. 6 / Teht. 2 a)
$h \leftrightarrow f \circ h$

$\square$

4. Kuvaus $\det : M(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ on jatkuva, sillä determinantin lauseke sisältää vain yhteen- ja kertolaskua matriisin alkioista. Siis $G\ell(n,\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\}) \overset{\circ}{\subset} M(n,\mathbb{R}) \approx \mathbb{R}^{n^2}$ ja $G\ell(n,\mathbb{R})$ on sileä monisto (Esim. 2.8 a)).

$\square$

5. • $G\ell(n,\mathbb{R})$ on metrinen avaruus, koska se on $\subset M(n,\mathbb{R}) \approx \mathbb{R}^{n^2}$, siis T_1-ehto on voimassa.

• Matriisien tulon jokainen komponentti saadaan yhteen- ja kertolaskulla alkuperäisten matriisien alkioista. Siis tulon jatkuvuus on ok.

• $\iota : G\ell(n,\mathbb{R}) \to G\ell(n,\mathbb{R})$ jatkuva?
$A \longmapsto A^{-1}$

Kts. esim. [Honkasalo: Lin. alg. I, s. 118]

$A^{-1} = [c_{ij}]$, missä

$$c_{ij} = \frac{1}{\det(A)}(-1)^{i+j}\det(A_{ij}),$$

missä A_{ij} on A:n alimatriisi.
Siis jokainen komponentti $c_{ij} \in \mathbb{R}$ saadaan käyttämällä projektioita ja determinanttia, joka on jatkuva funktio. Lisäksi $\det(A) \neq 0$, koska $A \in G\ell(n,\mathbb{R})$. Siis funktion ι jokainen komponenttifunktio on jatkuva, joten ι on jatkuva.

$\square$

6. a) • h on hyvin määritelty: kun $x \in V$, niin $-x \notin V$, joten tiedosta $[x]$ voidaan päätellä x.

$$\begin{tikzcd} V\times\mathbb{R} \arrow[dr, "\varphi"] \arrow[d, "p\times id"', "\approx"] & \\ U\times\mathbb{R} \arrow[r, "h"'] & \pi^{-1}U \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} (x,t) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & ([x], tx) \\ ([x], t) \arrow[ur, mapsto] & \end{tikzcd}$$

• $h = \varphi\circ(p\times id)^{-1}$, joten h on jatkuva.

• h on injektio: jos $([x], tx) = ([x'], t'x')$, on $[x] = [x']$, josta seuraa $x = x'$, koska $x, x' \in V$. Siis $tx = t'x' = t'x$, josta seuraa $t = t'$, koska x ei ole nollavektori ($tx = t'x \Rightarrow (t-t')x = \bar{0} \overset{x\neq\bar{0}}{\Rightarrow} t - t' = 0$).

• h on surjektio, koska
$$\pi^{-1}U = \{([x], v) \mid [x] \in U,\ v = tx \text{ jollakin } t \in \mathbb{R}\}.$$

- h^{-1} on jatkuva:

tarkastellaan ensin funktiota $\eta : V \times \mathbb{R} \to V \times \mathbb{R}^{n+1}$, $(x,t) \mapsto (x, tx)$, joka on selvästi injektio. Merk. $\psi : \eta(V \times \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ funktiota $(x, tx) \mapsto t$. Os. että ψ on jatkuva:

olk. $(x_0, t_0 x_0) \in \eta(V \times \mathbb{R}^{n+1})$ ja $\varepsilon > 0$.

1° $\underline{t_0 = 0}$: jos $(x, tx) \in \eta(V \times \mathbb{R}^{n+1})$ s.e. $\|(x_0, 0) - (x, tx)\| < \varepsilon$, niin erityisesti $\|0 - tx\| < \varepsilon$, joten $\underbrace{|t|}_{= |\psi(x_0, t_0 x_0) - \psi(x, tx)|} \overset{\text{koska } x \in S^n}{=} \|tx\| < \varepsilon$.

2° $\underline{t_0 \neq 0}$: jos $\|(x_0, t_0 x_0) - (x, tx)\| < \min\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2|t_0|}\}$, on $\|t_0 x_0 - tx\| < \frac{\varepsilon}{2}$ ja $\|x_0 - x\| < \frac{\varepsilon}{2|t_0|}$ ja saadaan

$$|\psi(x_0, t_0 x_0) - \psi(x, tx)| = |t - t_0| \overset{\text{koska } x \in S^n}{=} \|t_0 x - tx\|$$

$$= \|t_0 x - t_0 x_0 + t_0 x_0 - tx\| \leq |t_0| \|x - x_0\| + \|t_0 x_0 - tx\|$$

$$< |t_0| \cdot \frac{\varepsilon}{2|t_0|} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \qquad \Box \ \psi \text{ jatkuva}$$

Nyt $h^{-1} : \pi^{-1} U \longrightarrow V \times \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow U \times \mathbb{R}$

$$([x], tx) \longmapsto (x, tx) \longmapsto ([x], \psi(x, tx)) = ([x], t)$$

on jatkuva.

- lineaarisuus säikeillä: kun $x \in \mathbb{R}^{n+1}$, niin funktio $\varphi_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n+1}$, $t \mapsto tx$, on lineaarinen.

$$\varphi_x(at_1 + bt_2) = (at_1 + bt_2)x = at_1 x + bt_2 x$$

$$a\varphi_x(t_1) + b\varphi_x(t_2) = at_1 x + bt_2 x \quad // \text{ ok.}$$

$\Box$

b) funktio ei olisi hyvin määritelty:

koska $\mathbb{R}P^n$:ssä $[x] = [-x]$, niin saataisiin

$$([x], t) = ([-x], t)$$

$$\Rightarrow h([x], t) = h([-x], t)$$

$$\Rightarrow ([x], tx) = ([x], t(-x))$$

$\Rightarrow$ $tx = -tx$, joka ei pidä paikkaansa (paitsi jos $t = 0$).