Homotopia ja vektorikimput
Harj. 6 (16.10.2014)

1. a) Olk. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2, \sin x_1)$ ja
$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g(x_1, x_2) = (e^{x_1}, 2x_2)$.
Laske matriisit Df, Dg ja $D(g \circ f)$ ja todista ketjusäännön voimassaolo näille funktioille.
b) Anna esimerkki sileästä homeomorfismista $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joka ei ole diffeomorfismi.

2. Osoita ketjusääntöä käyttäen Lauseen 2.11 todistuksessa esiintyvät yhtälöt a) $p'(0) = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{\partial h}{\partial u_i}(0)$,

b) $\frac{d}{dt}(h \circ (h^{-1} \circ p))(0) = \sum_i q_i'(0) \frac{\partial h}{\partial u_i}(0)$.

3. Osoita Lauseen 2.11 todistuksen yksityiskohta: ... voidaan valita $k_1, \ldots, k_n$ s.e. matriisi $\left(\frac{\partial h_{k_i}}{\partial x_j}(0) \right)$ on kääntyvä.
Yleisemmin muotoiltuna:
Jos A on $(k \times n)$-matriisi, jota vastaava lineaarikuvaus $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ on injektio, niin matriisista A voidaan valita n kpl rivejä s.e. saatava $(n \times n)$-matriisi on kääntyvä.

4. Todista Lause 2.13.

5. Tarkastellaan palloa S^2 esimerkkinä Lauseen 2.11 tuloksesta.
Olk. $x_0 = (0,0,1) \in S^2$. Mikä on $T_{x_0}(S^2)$ (t.s. mitkä $\mathbb{R}^3$:n vektorit siihen kuuluvat)? Käytä karttakuvausta h_3 (Esim 2.5.).

6. Jatkoa tehtävään 5.
Vektori $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in T_{x_0}(S^2)$. Anna esimerkki sileästä käyrästä $p: (-\varepsilon, \varepsilon) \to S^2$, jolle $p'(0) = v$.