Homotopia ja vektorikimput
Harj. 6
Ratkaisuja.

1. a) $f(x_1,x_2) = (x_1^2+x_2, \sin x_1)$, $g(x_1,x_2) = (e^{x_1}, 2x_2)$,
jolloin $(g\circ f)(x_1,x_2) = g(x_1^2+x_2, \sin x_1) = (e^{x_1^2+x_2}, 2\sin x_1)$.

$$Df(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 & 1 \\ \cos x_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Dg(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} e^{x_1} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad D(g\circ f)(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 e^{x_1^2+x_2} & e^{x_1^2+x_2} \\ 2\cos x_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Dg(f(x_1,x_2)) = Dg(x_1^2+x_2, \sin x_1) = \begin{pmatrix} e^{x_1^2+x_2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$=$

Nyt $Dg(f(x_1,x_2))\circ Df(x_1,x_2)$ saadaan matriisitulona

$$\begin{pmatrix} e^{x_1^2+x_2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2x_1 & 1 \\ \cos x_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 e^{x_1^2+x_2} & e^{x_1^2+x_2} \\ 2\cos x_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Esim. $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^3$.
Käänteisfunktio $g(x) = \sqrt[3]{x}$ ei ole derivoituva 0:ssa.

2. a) Tässä $p: (-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ on yhdistetty funktio $p = h\circ w$,
missä $w: (-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathbb{R}^n$, $w(t) = (c_1 t, \dots, c_n t)$ ja $h: U\to M$
on koordinaatistofunktio. Tässä siis ε on valittu siten, että
$w(-\varepsilon,\varepsilon)\subset U$.
Ketjusäännön nojalla $p'(0) = Dh(\overbrace{w(0)}^{=\bar{0}\in\mathbb{R}^n})\circ Dw(0)$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u_1}(0) & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial u_n}(0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_k}{\partial u_1}(0) & \cdots & \frac{\partial h_k}{\partial u_n}(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1\frac{\partial h_1}{\partial u_1}(0) + \dots + c_n\frac{\partial h_1}{\partial u_n}(0) \\ \vdots \\ c_1\frac{\partial h_k}{\partial u_1}(0) + \dots + c_n\frac{\partial h_k}{\partial u_n}(0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_1\frac{\partial h_1}{\partial u_1}(0) \\ \vdots \\ c_1\frac{\partial h_k}{\partial u_1}(0) \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} c_n\frac{\partial h_1}{\partial u_n}(0) \\ \vdots \\ c_n\frac{\partial h_k}{\partial u_n}(0) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{\partial h}{\partial u_i}(0).$$

$\square$

b) $$\frac{d}{dt}\left(h\circ(h^{-1}\circ p)\right)(0) = Dh\big(\underbrace{h^{-1}\circ p(0)}^{=\bar{0}\in\mathbb{R}^n}\big)\circ D(h^{-1}\circ p)(0)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u_1}(0) & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial u_n}(0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_k}{\partial u_1}(0) & \cdots & \frac{\partial h_k}{\partial u_n}(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1'(0) \\ \vdots \\ q_n'(0) \end{pmatrix} \overset{\text{kuten a)}}{=} \cdots = \sum_{i=1}^{n} q_i'(0)\frac{\partial h}{\partial u_i}(0).$$

$\square$

3. $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix}.$$

Huom. koska A:ta vastaava lin. kuvaus L on injektio, on oltava $k \geq n$
$\left([H, s. 91] : n = \dim(\mathbb{R}^n) = \underbrace{\dim(\ker(L))}_{=0} + \underbrace{\dim(\operatorname{im}(L))}_{\leq k}\right)$

Injektiivisyydestä seuraa, että A:n sarakkeet ovat lin. riippumattomia. $(*)$
Ne siis virittävät n-ulotteisen aliavaruuden $\mathbb{R}^k$:ssa, $\dim(\mathrm{Col}(A)) = n$.
$[H, s. 57] \Rightarrow \dim(\mathrm{Row}(A)) = n$, eli rivivektorit virittävät n-ulotteisen aliavaruuden $\mathbb{R}^n$:ssä, eli siis koko $\mathbb{R}^n$:n.
Rivivektoreista täytyy tällöin löytyä n kpl, jotka ovat lin. riippumattomia:
jos löytyisi vain l kpl lin. riippumattomia(ksi), niin loput vektorit voitaisiin kirjoittaa näiden l kpl lineaarikombinaatioina; tällöin rivivektorit virittäisivät l-ulotteisen avaruuden, RR.
Nämä n kpl vektoreita virittävät siis koko $\mathbb{R}^n$:n, eli muodostavat kannan.
Niiden muodostaman $(n\times n)$-matriisin B aste on siis n, $\operatorname{rank}(B) = n$, kts. $[H, s. 57]$, joten $[H, s. 58$, Lause $2.7.4] \Rightarrow B$ on säännöllinen eli kääntyvä.

$\square$

$(*)$ Merk. $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$ A:n sarakkeet. Jos ne olisivat lin. riippuvia, löytyisi $x_1, \ldots, x_n$ (joista ainakin yksi on $\neq 0$) s.e. $x_1\bar{a}_1 + \ldots + x_n\bar{a}_n = \bar{0}$.
Nyt $L(\bar{e}_i) = \bar{a}_i \ \forall i$, missä $\bar{e}_i$ on $\mathbb{R}^n$:n i:s kantavektori, ja saadaan
$$L(\underbrace{x_1\bar{e}_1 + \ldots + x_n\bar{e}_n}_{\neq\bar{0}}) = x_1L(\bar{e}_1) + \ldots + x_nL(\bar{e}_n) = x_1\bar{a}_1 + \ldots + x_n\bar{a}_n = \bar{0},$$
mikä on ristiriita L:n injektiivisyyden kanssa.

[Huom. $(*)$ pätee myös toiseen suuntaan:
jos $L(x_1\bar{e}_1 + \ldots + x_n\bar{e}_n) = \bar{0}$, niin $x_1\bar{a}_1 + \ldots + x_n\bar{a}_n = \bar{0}$.
Jos $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$ ovat lin. riippumattomia, seuraa tästä $x_1 = \ldots = x_n = 0$.
Siis $L(x_1\bar{e}_1 + \ldots + x_n\bar{e}_n) = \bar{0} \Rightarrow x_1 = \ldots = x_n = 0$ eli $\ker(L) = \{\bar{0}\}$
eli L on injektio.]

(Viittaukset: [H] = H. Honkasalo: Lineaarialgebra I, 2003)

4. ol. M^m, N^n sileitä monistoja (m, n ovat monistojen M, N dimensiot)

v1. $M \times N$ on sileä monisto

tod. Jos $M^m \subset \mathbb{R}^k$ ja $N^n \subset \mathbb{R}^l$, niin $M \times N \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l = \mathbb{R}^{k+l}$.

olk. $(x,y) \in M \times N$,

f homeomorfismi avoimelta joukolta $U \subset \mathbb{R}^m$ x:n avoimelle ymp. $V \subset M$,

g — " — — " — $U' \subset \mathbb{R}^n$ y:n avoimelle ymp. $V' \subset N$,

Tällöin
$$h = f \times g : U \times U' \longrightarrow V \times V'$$
$$(u,u') \longmapsto (f(u), g(u'))$$
on homeomorfismi av. joukolta $U \times U' \subset \mathbb{R}^{m+n}$ (x,y):n av. ympäristölle $V \times V' \subset M \times N$.

Jos $(u,u') \in U \times U'$, niin differentiaali $Dh(u,u') : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^{k+l}$ on injektio:

Nyt

koska f ei riipu u':sta
$$Dh(u,u') = \left(\begin{array}{c|c} Df(u) & 0 \\ \hline 0 & Dg(u') \end{array}\right),$$
koska g ei riipu u:sta

joten
$$Dh(u,u')\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Df(u)\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \\ Dg(u)\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Jos $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} a_1' \\ \vdots \\ a_m' \end{pmatrix}$, niin $Df(u)\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \neq Df(u)\begin{pmatrix} a_1' \\ \vdots \\ a_m' \end{pmatrix}$, koska $Df(u)$ inj.

Samoin jos $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} b_1' \\ \vdots \\ b_n' \end{pmatrix}$, niin $Dg(u)\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \neq Dg(u)\begin{pmatrix} b_1' \\ \vdots \\ b_m' \end{pmatrix}$, koska $Dg(u)$ inj,

$\Rightarrow$ $Dh(u,u')$ injektio.

$\square$ väite 1

v2. $T_{(x,y)}(M \times N) \cong T_x M \oplus T_y N$

tod.

Vektorit $\left\{ \frac{\partial f}{\partial u_i}(0) \right\}_{i=1,\dots,m}$ muodostavat avaruuden $T_x M \subset \mathbb{R}^k$ kannan: ne muodostavat vapaan jonon, koska Määr. 2.6 nojalla $Df(0)$ on injektio, kts. Huom. 2.7. Ne virittävät $T_x M$:n Lauseen 2.11 nojalla. Vastaavasti vektorit $\left\{ \frac{\partial g}{\partial u_j}(0) \right\}_{j=1,\dots,n}$ muod. $T_y N \subset \mathbb{R}^l$ kannan. Avaruuden $T_x M \oplus T_y N$ alkio voidaan esittää yksikäsitteisesti muodossa $(v, v') = (v, 0) + (0, v')$, missä $v \in T_x M$, $v' \in T_y N$, joten $(T_x M \oplus T_y N)$:n kannan muodostavat vektorit

$$\begin{array}{r} k \text{ koord.}\left\{ \vphantom{\frac{\partial f}{\partial u_i}} \right. \\ l \text{ koord.}\left\{ \vphantom{\begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}} \right. \end{array} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u_i}(0) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{\partial g}{\partial u_j}(0) \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}}\right\} k \text{ koord.} \\ \left.\vphantom{\frac{\partial g}{\partial u_j}}\right\} l \text{ koord.} \end{array}, \quad 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n.$$

(Tässä samastettiin $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l \leftrightarrow \mathbb{R}^{k+l}$)

Tarkastellaan sitten avaruutta $T_{(x,y)}(M\times N)$ ja karttakuvausta $h = f\times g$.
Kuvauksen h muuttuja on muotoa (u,u'), $u = (u_1,\dots,u_m)$, $u' = (u'_1,\dots,u'_n)$.
Merk. $(u,u')_p = \begin{cases} u_p, & p\le m \\ u'_{p-m}, & m+1\le p\le m+n. \end{cases}$

Vastaavasti kuten edellä, avaruuden $T_{(x,y)}(M\times N)$ kannan muodostavat vektorit

$$\left\{ \frac{\partial h}{\partial (u,u')_p}(0) \right\}_{p=1,\dots,m+n}.$$

Arvoilla $1\le p\le m$ on

$$\frac{\partial h}{\partial(u,u')_p}(0) = \frac{\partial h}{\partial u_p}(0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_p}(0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial u_p}(0) \\ \frac{\partial g_1}{\partial u_p}(0) \\ \vdots \\ \frac{\partial g_l}{\partial u_p}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_p}(0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial u_p}(0) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Arvoilla $m+1\le p\le m+n$ on

$$\frac{\partial h}{\partial(u,u')_p}(0) = \frac{\partial h}{u'_{p-m}}(0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u'_{p-m}}(0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial u'_{p-m}}(0) \\ \frac{\partial g_1}{\partial u'_{p-m}}(0) \\ \vdots \\ \frac{\partial g_l}{\partial u'_{p-m}}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{\partial g_1}{\partial u'_{p-m}}(0) \\ \vdots \\ \frac{\partial g_l}{\partial u'_{p-m}}(0) \end{pmatrix}$$

Kun tässä merkitään $j = p-m$ $(j = 1,\dots,n)$, havaitaan että saadaan täsmälleen samat kantavektorit kuin avaruudelle $T_xM\oplus T_yN$.
Tämä todistaa väitteen 2.

$\square$

5. Käytetään karttakuvausta $h: B^2\to V_3$, $(x_1,x_2)\mapsto (x_1, x_2, \sqrt{1-x_1^2-x_2^2})$, jolloin $h(0) = (0,0,1) = x_0$.
Nyt $Dh(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}} & -\frac{x_2}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}} \end{pmatrix}$, joten $Dh(\bar{0}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Tämän matriisin sarakevektorit muodostavat siis $T_{x_0}(S^2)$:n kannan (vrt. Tehtävän 4 väitteen 2 todistus).

Siis $T_{x_0}(S^2) = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, eli xy-taso
(mikä vastaa kuvasta tehtävää havaintoa, että S^2:n tangenttitaso pisteessä $(0,0,1)$ on xy-tason suuntainen).

6. Lausutaan v kantavektoreiden lin. kombinaationa:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{val. } c_1 = 2}}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{val. } c_2 = 1}}{1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(kts. Lause 2.11 todistus "$\Leftarrow$")
Määritellään $p(t) = h(c_1 t, c_2 t) = h(2t, t)$

$$= \left(2t, t, \sqrt{1 - 4t^2 - t^2}\right) = \left(2t, t, \sqrt{1-5t^2}\right).$$

Lauseen 2.11 (ja tehtävän 2 a)) nojalla

$$p'(0) = \sum_{i=1}^{2} c_i \frac{\partial h}{\partial u_i}(0) = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = v.$$

p:n määrittelyväli $(-\varepsilon, \varepsilon)$ on nyt valittava siten, että $\forall\, t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$: lauseke $(2t, t)$ kuuluu h:n määrittelyjoukkoon B^2. Void. esim. valita $\varepsilon = \frac{1}{3}$, koska tällöin $\|(2t, t)\| = \sqrt{4t^2 + t^2} = \sqrt{5t^2} < \sqrt{5 \cdot \frac{1}{9}} < 1$.

Siis: $p : \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \to S^2$, $p(t) = \left(2t, t, \sqrt{1-5t^2}\right)$.