Homotopia ja vektorikimput
Harjoitus 5 (9.10.2014)

1. a) Osoita, että kuvaus (luentomoniste, s. 29)

$$\pi|\colon B^n \to S^n \setminus \{e_{n+1}\}$$

on homeomorfismi.

b) Kts. Lauseen 1.5 todistus (s. 30). Osoita, että

$$U_1 \cap U_2 \approx S^{n-1} \times (-1, 1).$$

2. a) Osoita, että ei ole olemassa upotusta $S^1 \to \mathbb{R}$.
b) Osoita, että ei ole olemassa upotusta $S^2 \to \mathbb{R}^2$.

3. Väisälä, s. 167, tehtävä 23:11

4. Väisälä, s. 155, tehtävä 21:16

5. Mikä vika on seuraavassa todistuksessa?
Väite. $\pi(S^2, e_3) = 0$.
"Todistus". Olkoon $\alpha \in \Omega(S^2, e_3)$ silmukka. Valitaan $x \in S^2$ siten, että $x \notin \alpha(I)$. Nyt $S^2 \setminus \{x\} \approx \mathbb{R}^2$, joka on kutistuva, joten polku α on nollahomotooppinen avaruudessa $S^2 \setminus \{x\}$. Siis se on nollahomotooppinen myös avaruudessa S^2.

6. a) Osoita, että yhtälöryhmällä

$$\begin{cases} x \cos y = & x^2 + y^2 - 1 \\ y \cos x = & \sin(2\pi(x^3 + y^3)) \end{cases}$$

on ratkaisu kiekossa $\bar{B}^2$. Vihje: Lause V:24.14.

b) Sama kysymys yhtälöryhmälle

$$\begin{cases} x \cos y = & x^2 + y^2 - 1 \\ y \cos x = & \tan(2\pi(x^3 + y^3)). \end{cases}$$