Homotopia ja vektorikimput
Harjoitus 5. Ratkaisuja.

1. a) Kuvaus

$\varphi\colon (\bar{B}^n, S^{n-1}) \to (S^n, e_{n+1}),\ \ \pi(y) = (2\sqrt{1-|y|^2}\cdot y, 2|y|^2-1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \approx \mathbb{R}^{n+1}.$

- $$\begin{aligned}|\pi(y)|^2 &= (4(1-|y|^2)|y|^2) + (4|y|^4 - 4|y|^2 + 1)\\ &= 4|y|^2 - 4|y|^4 + 4|y|^4 - 4|y|^2 + 1 = 1\end{aligned}$$
  eli $\pi(y) \in S^n$.
- Jos $|y| = 1$, on $\pi(y) = (2 \cdot 0 \cdot y, 2 \cdot 1 - 1) = (\bar{0}, 1)$ eli $\pi(S^{n-1}) = e_{n+1}$.
- Jos $\pi(y) = (\bar{0}, 1)$, on $2|y|^2 - 1 = 1$ eli $|y|^2 = 1$, joten $y \in S^{n-1}$. Siis $\pi^{-1}(e_{n+1}) = S^{n-1}$.
- Edellisestä seuraa, että saadaan $\pi|\colon B^n \to S^n \setminus \{e_{n+1}\}$.
- π on jatkuva, joten $\pi|$ on jatkuva.

Määritellään sitten

$$\rho\colon S^n \setminus \{e_{n+1}\} \to B^n, \quad \rho(z,t) = \frac{z}{\sqrt{2(1-t)}},$$

missä $(z,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

- Huom. tässä $(z,t) \in S^n \setminus \{e_{n+1}\}$, joten $|z|^2 + t^2 = 1$ ja $t \neq 1$.
- Nimittäjä $\neq 0$, koska $t \neq 1$.
- $$\left|\frac{z}{\sqrt{2(1-t)}}\right|^2 = \frac{|z|^2}{2(1-t)} = \frac{1-t^2}{2(1-t)} = \frac{1+t}{2} < \frac{1+1}{2} = 1,$$
  joten $\rho(z,t) \in B^n$.
- ρ on jatkuva.

$\rho \circ \pi = \mathrm{id}$:

$$\rho(\pi(y)) = \frac{2\sqrt{1-|y|^2}\cdot y}{\sqrt{2(1-2|y|^2+1)}} = \frac{2\sqrt{1-|y|^2}}{\sqrt{4-4|y|^2}}\cdot y = y.$$

$\pi \circ \rho = \mathrm{id}$:

$$\pi(\rho(z,t)) = \pi\left(\frac{z}{\sqrt{2(1-t)}}\right) = \left(2\sqrt{1-\frac{|z|^2}{2(1-t)}}\cdot\frac{z}{\sqrt{2(1-t)}}, 2\cdot\frac{1+t}{2}-1\right)$$

$$= \left(2\sqrt{1-\frac{1+t}{2}}\frac{z}{\sqrt{2(1-t)}}, t\right) = \left(2\sqrt{\frac{1-t}{2}}\frac{z}{\sqrt{2(1-t)}}, t\right) = (z,t).$$

Kolmannessa välivaiheessa käytettiin tietoa $|z|^2 = 1-t^2$.
Siis $\pi|$ on homeomorfismi käänteiskuvauksenaan ρ.

b) Määritellään

$$\varphi\colon S^n \setminus \{e_{n+1}, -e_{n+1}\} \to S^{n-1}\times(-1,1)$$

$$(z,t) \mapsto \left(\frac{z}{|z|}, t\right), \quad z\in\mathbb{R}^n, t\in\mathbb{R}.$$

- Koska $e_{n+1}, -e_{n+1}$ eivät ole määrittelyjoukossa, niin $z \neq \bar{0}$, joten $z/|z|$ on määritelty ja $z/|z| \in S^{n-1}$. Vastaavasti $t \notin \{-1,+1\}$, joten $t \in (-1,1)$.

- Jatkuvuus ok.

Määritellään sitten

$$\psi\colon S^{n-1}\times(-1,1) \to S^n \setminus \{e_{n+1}, -e_{n+1}\}$$

$$(z,t) \mapsto (\sqrt{1-t^2}\cdot z, t), \quad z\in\mathbb{R}^n, t\in\mathbb{R}.$$

- Koska $-1 < t < 1$, on $\sqrt{1-t^2} \in \mathbb{R}$

- Koska $|z| = 1$, on $|(\sqrt{1-t^2}\cdot z, t)| = \sqrt{(1-t^2)|z|^2+t^2} = 1$, eli kuvapiste on pallolla S^n.

- Koska $t \notin \{-1,+1\}$, on kuvapiste joukossa $S^n \setminus \{e_{n+1}, -e_{n+1}\}$.

- Jatkuvuus ok.

$\psi \circ \varphi = \mathrm{id}$: Olkoon $(z,t) \in S^n \setminus \{e_{n+1}, -e_{n+1}\}$, jolloin

$$\psi \circ \varphi(z,t) = \psi(z/|z|,t) = (\sqrt{1-t^2} \cdot z/|z|, t) = (z,t).$$

Viimeisessä välivaiheessa käytettiin tietoa $(z,t) \in S^n$, josta seuraa $|z|^2 = 1 - t^2$.
$\varphi \circ \psi = \mathrm{id}$: Olkoon $(z,t) \in S^{n-1} \times (-1,1)$, jolloin

$$\varphi \circ \psi(z,t) = \varphi(\sqrt{1-t^2} \cdot z, t) = \left(\frac{\sqrt{1-t^2} \cdot z}{|\sqrt{1-t^2} \cdot z|}, t \right) = (z/|z|, t) = (z,t).$$

Viimeisessä välivaiheessa käytettiin tietoa $z \in S^{n-1}$.

2. a) Antiteesi: on olemassa upotus $f \colon S^1 \to \mathbb{R}$. Koska S^1 on yhtenäinen, niin $f(S^1)$ on yhtenäinen, siis Lauseen 14.15 (Väisälä: Topologia I) nojalla fS^1 on väli. Siis fS^1 on konveksi, joten se on yhdesti yhtenäinen. Koska f on upotus, on $fS^1 \approx S^1$, mikä on ristiriita, koska S^1 ei ole yhdesti yhtenäinen. Huom. havainnon "fS^1 on väli" jälkeen olisi voitu jatkaa myös seuraavasti: poistetaan väliltä fS^1 yksi sisäpiste a, jolloin saataisiin homeomorfismi $S^1 \setminus \{f^{-1}(a)\} \to f(S^1) \setminus \{a\}$, mikä on ristiriita, koska ensin mainittu on yhtenäinen, kun taas jälkimmäinen on epäyhtenäinen.
b) Borsukin–Ulamin lauseen nojalla: jos $f \colon S^2 \to \mathbb{R}^2$ on jatkuva, niin $f(-x) = f(x)$ jollakin $x \in S^2$. Siis ei ole olemassa jatkuvaa injektiota $S^2 \to \mathbb{R}^2$, joten ei ole olemassa upotusta $S^2 \to \mathbb{R}^2$.

3. Valitaan kantapiste $x_0 \in U_1$.
Osoitetaan ensin, että X on polkuyhtenäinen. Olkoot $x, y \in X$, valitaan $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ siten, että $x \in U_{n_1}, y \in U_{n_2}$. Merkitään $n = \max\{n_1, n_2\}$, jolloin $x, y \in U_n$ (koska $U_1 \subset U_2 \subset \ldots$). Koska U_n on oletuksen nojalla polkuyhtenäinen, x ja y voidaan yhdistää polulla U_n:ssä, eli myös X:ssä. Siis X on polkuyhtenäinen.
Olkoon sitten $\alpha \in \Omega(X, x_0)$. Osoitetaan, että α on nollahomotooppinen. Koska kuvajoukko $\alpha(I)$ on kompakti ja avoimet joukot U_n peittävät X:n, niin on olemassa äärellinen osapeite $U_{n_1}, \ldots, U_{n_k}$ joukolle $\alpha(I)$. Jos merkitään $n_0 = \max\{n_1, \ldots, n_k\}$, on siis $\alpha(I) \subset U_{n_0}$ (koska $U_1 \subset U_2 \subset \ldots$). Koska U_{n_0} on yhdesti yhtenäinen, on α nollahomotooppinen U_{n_0}:ssa, siis myös X:ssä.

4. Olkoon $h: X \times I \to S^1$ homotopia $f \simeq g$. Merkitään $w_0 = f(x_0) = g(x_0)$. Määritellään $h': X \times I \to S^1$ kaavalla

$$h'(x,t) = \frac{w_0}{h(x_0,t)} h(x,t),$$

missä laskutoimitukset ovat kompleksilukujen kerto- ja jakolasku. Nyt

$$h'(x,0) = \frac{w_0}{h(x_0,0)} h(x,0) = \frac{w_0}{w_0} f(x) = f(x) \text{ jokaisella } x \in X,$$

$$h'(x,1) = \frac{w_0}{h(x_0,1)} h(x,1) = \frac{w_0}{w_0} g(x) = g(x) \text{ jokaisella } x \in X$$

ja

$$h'(x_0,t) = \frac{w_0}{h(x_0,t)} h(x_0,t) = w_0 \text{ jokaisella } t \in I.$$

Siis $h': f \simeq g$ rel x_0.

5. Olkoon $f: I \to I^2$ jatkuva surjektio (n.s. Peanon käyrä, kts. esim. Väisälä, s. 125, tehtävä 15:21), $g: I^2 \to \bar{B}^2$ homeomorfismi ja $\pi: \bar{B}^2 \to S^2$ aiemmin määritelty surjektio (Tehtävä 1). Nyt $\alpha = \pi \circ g \circ f: I \to S^2$ on surjektiivinen polku. Jos vielä valitaan S^2:n polku β pisteestä $\alpha(1)$ pisteeseen $\alpha(0)$, niin $\alpha\beta$ on surjektiivinen silmukka. Virhe todistuksessa on siis kohdassa ”valitaan $x \notin \alpha(I)$”.

6. a) Tarkastellaan funktiota

$$f: \bar{B}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$f(x,y) = (x \cos y - x^2 - y^2 + 1, y \cos x - \sin(2\pi(x^3 + y^3))),$$

joka selvästi on jatkuva. Ympyrällä S^1 on $x^2 + y^2 = 1$, jolloin

$$f(x,y) = (x \cos y, y \cos x - \sin(2\pi(x^3 + y^3))).$$

Koska $\cos(-y) = cos(y)$, on $-x\cos(-y) = -x \cos y$, ja vastaavasti $-y\cos(-x) = -y \cos x$. Lisäksi $(-x)^3 + (-y)^3 = -(x^3 + y^3)$, ja $\tan(-z) = \tan z$. Siis saadaan, että ympyrällä S^1 pätee $f(-x,-y) = -f(x,y)$, joten Lauseen V:24.14 nojalla funktiolla f on nollakohta. Tämä nollakohta antaa ratkaisun alkuperäiselle yhtälöparille.

b) Tarkastellaan funktiota

$$g: \bar{B}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$g(x,y) = (x\cos y - x^2 - y^2 + 1, \tan^{-1}(y\cos x) - 2\pi(x^3 + y^3)),$$

joka on määritelty ja jatkuva kiekossa $\bar{B}^2$. Tässä $\tan^{-1}\colon \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$. Vastaavasti kuten yllä tälle funktiolle löydetään nollakohta $(x_0, y_0) \in \bar{B}^2$, eli

$$\begin{cases} x_0 \cos y_0 & = x_0^2 + y_0^2 - 1 \\ \tan^{-1}(y_0 \cos x_0) & = 2\pi(x_0^3 + y_0^3)) \end{cases}$$

Ottamalla jälkimmäisessä yhtälössä puolittain funktio tan nähdään, että (x_0, y_0) on ratkaisu alkuperäiselle yhtälöparille.