Homotopia ja vektorikimput
Harjoitus 4 (2.10.2014)

1. Keksi esimerkkejä avaruuksista (X, x_0), (Y, y_0) ja funktioista $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ siten, että

a) f on injektio, f_* ei ole injektio
b) f ei ole injektio, f_* on injektio
c) f on surjektio, f_* ei ole surjektio
d) f ei ole surjektio, f_* on surjektio.

2. Anna esimerkki peitekuvauksesta $p\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ ja poluista $\alpha, \beta \in \Omega(Y, y_0)$ siten, että $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$, mutta $\alpha \not\simeq \beta$.

3. Olkoon X avaruus ja $A \subset X$. Sanomme, että A on X:n *deformaatioretrakti*, jos on olemassa homotopia $H\colon X \times I \to X$ siten, että

$$H(x, 0) = x \quad \text{jokaisella } x \in X,$$

$$H(x, 1) \in A \quad \text{jokaisella } x \in X$$

ja

$$H(a, 1) = a \quad \text{jokaisella } a \in A.$$

Sanomme, että A on X:n *vahva deformaatioretrakti*, jos on olemassa homotopia $H\colon X \times I \to X$ siten, että

$$H(x, 0) = x \quad \text{jokaisella } x \in X,$$

$$H(x, 1) \in A \quad \text{jokaisella } x \in X$$

ja

$$H(a, t) = a \quad \text{jokaisella } a \in A, t \in I.$$

a) Osoita: jos A on X:n deformaatioretrakti, niin A on X:n retrakti.

b) Osoita: jos A on X:n deformaatioretrakti, niin $A \simeq X$.

c) Osoita, että S^{n-1} on avaruuden $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ vahva deformaatioretrakti.

d) Anna esimerkki tilanteesta, jossa A on X:n deformaatioretrakti, mutta ei vahva deformaatioretrakti.

4. Väisälä, s. 155, tehtävä 21:18

5. Väisälä, s. 175, tehtävä 24:4

6. Väisälä, s. 175, tehtävä 24:7