**Homotopia ja vektorikimput**
**Harjoitus 4. Ratkaisuja.**

1. 1) $f\colon S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$, jolloin $f_*\colon \mathbb{Z} \to 0$ ei ole injektio

2) projektio $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, jolloin $f_*\colon 0 \to 0$ on injektio; tai $f$ on homotopiaekvivalenssi $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to S^1$, $f(x) = x/|x|$, jolloin $f_*$ on isomorfismi $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

3) $f\colon I \to S^1$, $t \mapsto e^{2\pi it}$, jolloin $f_*\colon 0 \to \mathbb{Z}$ ei ole surjektio

4) $f\colon \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^2$, jolloin $f_*\colon 0 \to 0$ on surjektio; tai $f$ on inkluusio $S^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, jolloin $f_*$ on isomorfismi $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.

2. Olkoon $(Y, y_0) = (S^1, 1)$, $\alpha = \epsilon_1$ ja $\beta\colon I \to Y$ polku $\beta(t) = e^{4\pi it}$. Tunnetusti (Lause V:25.2) on $\alpha \not\simeq \beta$. Olkoon $(X, x_0) = (S^1, 1)$ ja $p$ peitekuvaus $p\colon S^1 \to S^1$, $p(z) = z^2$. Nyt $\tilde{\alpha} = \epsilon_1$, joten $\tilde{\alpha}(1) = 1$. Lisäksi polun $\beta$ nosto on polku $\tilde{\beta}\colon \tilde{\beta}(t) = e^{2\pi it}$, koska

$$p \circ \tilde{\beta}(t) = p(e^{2\pi it}) = (e^{2\pi it})^2 = e^{4\pi it} = \beta(t).$$

Siis

$$\tilde{\beta}(1) = e^{2\pi i} = 1 = \tilde{\alpha}(1).$$

Helpompi esimerkki: $(X, x_0) = (Y, y_0) = (S^1, 1)$, $p = \mathrm{id}_{S^1}$, $\alpha(t) = e^{2\pi it}$ ja $\beta(t) = e^{-2\pi it}$. Tällöin $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1) = 1$, mutta $\alpha \not\simeq \beta$.

3. a) Koska $H(x, 1) \in A$ jokaisella $x \in X$, voidaan määritellä kuvaus $r\colon X \to A$ kaavalla $r(x) = H(x, 1)$. Se on jatkuva, ja lisäksi retraktio, koska $H(a, 1) = a$ jokaisella $a \in A$.

b) Jos merkitään $i\colon A \to X$ on inkluusio, ja $r$ on kuten a)-kohdassa, niin $r \circ i = \mathrm{id}_A$ ja $H\colon \mathrm{id}_X \simeq i \circ r$. Tämä todistaa väitteen.

c) Määritellään

$$H\colon \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\} \times I \to \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$$
$$H(x, t) = (1 - t)x + t\frac{x}{|x|}.$$

$H$ on vaadittu homotopia, koska

$$H(x, 0) = x \quad \text{jokaisella } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$$

$$H(x, 1) = \frac{x}{|x|} \in S^{n-1} \quad \text{jokaisella } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$$

ja

$$H(a,t) = (1-t)a + t\frac{a}{|a|} = a - ta + ta = a \text{ jokaisella } a \in S^{n-1}.$$

d) Olkoon $X$ kampa-avaruus (kts. V:21:8, Harj. 2/Teht. 6) ja $A = \{(0,1)\} \subset X$. Olkoot $f_1$, $f_2$ kuten tehtävän ratkaisussa ja $f_3$ vakiofunktio $f_3 \equiv (0,1)$. Vakiofunktiot $f_2$ ja $f_3$ ovat homotooppiset, koska $X$ on polkuyhtenäinen. Nyt homotopia $\mathrm{id}_X \simeq f_1 \simeq f_2 \simeq f_3$ osoittaa, että $A$ on $X$:n deformaatioretrakti. Jos $A$ olisi $X$:n vahva deformaatioretrakti, olisi olemassa homotopia $\mathrm{id}_X \simeq f_3$ rel $(0,1)$, mutta tällaista ei ole Harj. 2/Teht. 6 nojalla.

4. Oletuksesta seuraa, että $f(x) \neq -g(x)$ jokaisella $x \in X$. Tällöin jana pisteestä $f(x)$ pisteeseen $g(x)$ ei kulje origon kautta: Jos olisi $tf(x) + (1-t)g(x) = \bar{0}$ jollakin $t \in [0,1]$, niin $|tf(x)| = |(1-t)g(x)|$, josta seuraa $t = 1-t$ (koska $|f(x)| = |g(x)| = 1$) eli $t = 1/2$. Tällöin saataisiin $f(x) + g(x) = \bar{0}$, mikä on ristiriita.
Olkoon $H' \colon X \times I \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\bar{0}\}$ janahomotopia $f \simeq g$ ja $H = r \circ H' \colon X \times I \to S^n$, missä $r \colon \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\bar{0}\} \to S^n$ on retraktio $r(x) = x/|x|$. Selvästi $H$ on jatkuva. Lisäksi

$$H(x,0) = r(H'(x,0)) = r(f(x)) = \frac{f(x)}{|f(x)|} = f(x),$$

koska $|f(x)| = 1$. Vastaavasti $H(x,1) = g(x)$, joten $H$ on etsitty homotopia.

5. Olkoon $\alpha$ polku $Y$:ssä pisteestä $y_0$ pisteeseen $y_1$ ja olkoon $x \in p^{-1}\{y_0\}$. Lauseen 24.5 nojalla polulla $\alpha$ on täsmälleen yksi $p$-nosto $\tilde{\alpha}_x$ siten, että $\tilde{\alpha}_x(0) = x$. Koska $\alpha(1) = y_1$, niin $\tilde{\alpha}_x(1) \in p^{-1}\{y_1\}$ ja voidaan määritellä

$$\varphi \colon p^{-1}\{y_0\} \to p^{-1}\{y_1\}$$

$$x \mapsto \tilde{\alpha}_x(1).$$

Osoitetaan, että $\varphi$ on surjektio. Olkoon $x' \in p^{-1}\{y_1\}$. Nyt polulla $\beta = \alpha^{\leftarrow}$ on täsmälleen yksi $p$-nosto $\tilde{\beta}_{x'}$ siten, että $\tilde{\beta}_{x'}(0) = x'$. Olkoon $x = \tilde{\beta}_{x'}(1)$. Osoitetaan, että $\varphi(x) = x'$. Polun $\alpha^{\rightarrow}\alpha$ pisteestä $x'$ alkava nosto on $\tilde{\beta}_{x'}\tilde{\alpha}_x$, koska

$$p \circ (\tilde{\beta}_{x'}\tilde{\alpha}_x) = (p \circ \tilde{\beta}_{x'})(p \circ \tilde{\alpha}_x) = \beta\alpha$$

ja $\tilde{\beta}_{x'}(1) = \tilde{\alpha}_x(0) = x$. Nyt $\beta\alpha \sim \epsilon$, joten polun $\tilde{\beta}_{x'}\tilde{\alpha}_x$ päätepiste on sama kuin polun $\epsilon$ noston päätepiste, eli $x'$. Siis $\tilde{\alpha}_x(1) = x'$ eli $\varphi(x) = x'$.

Osoitetaan sitten injektiivisyys. Olkoot $x_1, x_2 \in p^{-1}\{y_0\}$ ja $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$ eli $\tilde{\alpha}_{x_1}(1) = \tilde{\alpha}_{x_2}(1) = x'$ jollakin $x' \in p^{-1}\{y_1\}$. Polun $\alpha\alpha^{\leftarrow}$ pisteestä $x_1$ alkava nosto on $\tilde{\alpha}_{x_1}\tilde{\beta}_{x'}$, koska

$$p \circ (\tilde{\alpha}_{x_1}\tilde{\beta}_{x'}) = (p \circ \tilde{\alpha}_{x_1})(p \circ \tilde{\beta}_{x'}) = \alpha\beta = \alpha\alpha^{\leftarrow}$$

ja $\tilde{\alpha}_{x_1}(1) = x' = \tilde{\beta}_{x'}(0)$. Nyt $\alpha\alpha^{\leftarrow} \sim \epsilon$, joten polun $\tilde{\alpha}_{x_1}\tilde{\beta}_{x'}$ päätepiste on sama kuin polun $\epsilon$ noston päätepiste, eli $x_1$. Siis $\tilde{\beta}_{x'}(1) = x_1$. Aivan vastaavasti voidaan osoittaa, että $\tilde{\beta}_{x'}(1) = x_2$. Siis $x_1 = x_2$, mistä injektiivisyys seuraa.

6. Osoitetaan ensin, että ei ole olemassa homeomorfismia $f: \bar{B}^2 \to \bar{B}^2$, jolle $f(0,1) \in B^2$. Antiteesi: $f$ on tällainen homeomorfismi. Tällöin myös $f$:n rajoittuma $\bar{B}^2 \setminus \{(0,1)\} \to \bar{B}^2 \setminus \{f(0,1)\}$ on homeomorfismi. Nyt $\bar{B}^2 \setminus \{(0,1)\} = \bar{B}^2 \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 1\}$ on kahden konveksin joukon leikkauksena konveksi, erityisesti se on yhdesti yhtenäinen. Toisaalta $\bar{B}^2 \setminus \{f(0,1)\} \approx \bar{B}^2 \setminus \{\bar{0}\} \simeq S^1$, joka ei ole yhdesti yhtenäinen; ensimmäinen homeomorfismi saadaan harjoitustehtävästä V:3:12, jälkimmäinen homotopiaekvivalenssi saadaan deformaatioretraktiosta kuten tehtävässä 3. Päädyttiin siis ristiriitaan, joten alkuperäinen väite pätee.
Pidetään tunnettuna, että kierrot $\bar{B}^2 \to \bar{B}^2$ ovat homeomorfismeja, jolloin äskeisestä seuraa, että ei ole olemassa homeomorfismia $f: \bar{B}^2 \to \bar{B}^2$ ja pistettä $x \in S^1$, jolle $f(x) \in B^2$ (jos olisi, niin sopiva kierto kuvaisi pisteen $(0,1)$ pisteelle $x$, ja saataisiin homeomorfismi, jota yllä olevan nojalla ei ole olemassa).
Siis homeomorfismille $f: \bar{B}^2 \to \bar{B}^2$ pätee välttämättä $fS^1 \subset S^1$. Tämä pätee siis myös $f$:n käänteiskuvaukselle, eli $f^{-1}(S^1) \subset S^1$; näistä saadaan $fS^1 = S^1$. Tästä seuraa suoraan, että myös $fB^2 = B^2$.
Avaruus $X$ on homogeeninen, jos jokaisella $a, b \in X$ on olemassa homeomorfismi $f: X \to X$, jolle $f(a) = b$. Edellisen nojalla ei ole olemassa homeomorfismia $f: \bar{B}^2 \to \bar{B}^2$, jolle $f(0,1) = (0,0)$, joten $\bar{B}^2$ ei ole homogeeninen avaruus.