Homotopia ja vektorikimput
Harjoitus 3. Ratkaisuja.

1. Jos $f \simeq g$, niin Lauseen 21.4 nojalla $pr_j \circ f \simeq pr_j \circ g$ kaikilla $j \in J$. Kääntäen, olkoon (jokaisella $j \in J$) $h_j \colon X \times I \to Y_j$ homotopia $pr_j \circ f \simeq pr_j \circ g$ ja määritellään $h \colon X \times I \to \prod_{j \in J} Y_j$ siten, että sen komponenttikuvaukset ovat kuvaukset h_j, $j \in J$. Tunnetusti h on tällöin jatkuva, kts. [Väisälä, s. 50]. Lisäksi

$$h(x,0) = (h_j(x,0))_{j \in J} = (pr_j \circ f(x))_{j \in J} = f(x)$$

ja

$$h(x,1) = (h_j(x,1))_{j \in J} = (pr_j \circ g(x))_{j \in J} = g(x),$$

joten h on homotopia $f \simeq g$.

2. Määritellään $r \colon X \to A$ kaavalla $(x_1, ..., x_n) \mapsto (x_1, ..., x_{n-1}, 0)$. Nyt $r \circ j = \mathrm{id}_A$ ja $j \circ r \colon X \to X$ on kuvaus $(x_1, ..., x_n) \mapsto (x_1, ..., x_{n-1}, 0)$. Koska X on kahden konveksin joukon (suljettu kuula ja suljettu puolitaso) leikkauksena konveksi, on $j \circ r \simeq \mathrm{id}_X$.

3. Olkoon $\{B_i\}_{i \in I}$ joukon U peite avoimilla kuulilla $B_i \subset U$. Tarkastellaan välin I avointa peitettä $\{\alpha^{-1}(B_i)\}_{i \in I}$, ja olkoon $\lambda > 0$ tämän peitteen Lebesguen luku. Valitaan $n \in \mathbb{N}$ siten, että $\frac{1}{n} < \lambda$ ja jaetaan I osaväleihin jakopisteinä $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., 1$. Merkitään $I_k = [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$. Siis jokaisella $k = 0, ..., n-1$ on olemassa $i_k \in I$ siten, että

$$(*) \qquad \alpha(I_k) \subset B_{i_k}.$$

Olkoon β murtoviivapolku avaruudessa $\mathbb{R}^n$, jonka määräävät pisteet

$$\alpha(0), \alpha(1/n), \alpha(2/n), ..., \alpha(1).$$

Tiedon $(*)$ nojalla kaksi peräkkäistä pistettä kuuluvat samaan (konveksiin) kuulaan $B_{i_k} \subset U$, joten β on murtoviivapolku U:ssa.
Olkoon $H \colon I \times I \to \mathbb{R}^n$ janahomotopia polkujen α ja β välillä. Janahomotopia H on polkuhomotopia, koska $\alpha(0) = \beta(0)$ ja $\alpha(1) = \beta(1)$. Riittää siis osoittaa, että H on homotopia U:ssa. Jokaisella $k \in \{0, ..., n-1\}$ pätee $\alpha(I_k) \subset B_{i_k}$ ja $\beta(I_k) \subset B_{i_k}$. Koska B_{i_k} on konveksi, myös polkujen pisteiden väliset janat $\subset B_{i_k} \subset U$. Siis H on homotopia U:ssa.

4. Olkoon $\alpha \in \Omega(X, x_0)$. On osoitettava, että

$$g_*(\bar{\alpha}) = \overline{\sigma^{\leftarrow}} f_*(\bar{\alpha})\bar{\sigma}$$

eli

$$\overline{\epsilon_{y_1}} = g_*(\bar{\alpha})^{-1}\overline{\sigma^{\leftarrow}} f_*(\bar{\alpha})\bar{\sigma}$$

eli

$$\overline{g \circ \alpha^{\leftarrow}} \cdot \overline{\sigma^{\leftarrow}} \cdot \overline{f \circ \alpha} \cdot \overline{\sigma} = \overline{\epsilon_{y_1}}. \tag{1}$$

Olkoon $z_0 = (1,1) \in I^2$ ja $\omega \in \Omega(I^2, z_0)$ neljän janapolun kompositio, joka kiertää neliön reunan vastapäivään.
Määritellään $F\colon I^2 \to Y$ kaavalla $F(s,t) = h(\alpha(s), t)$, missä $h\colon X \times I \to Y$ on homotopia $f \simeq g$. Nyt

$$F(s,1) = h(\alpha(s), 1) = g(\alpha(s)), \tag{2}$$

$$F(0,t) = h(\alpha(0), t) = h(x_0, t) = \sigma(t), \tag{3}$$

$$F(s,0) = h(\alpha(s), 0) = f(\alpha(s)), \tag{4}$$

ja

$$F(1,t) = h(\alpha(1), t) = h(x_0, t) = \sigma(t). \tag{5}$$

Tästä nähdään, että

$$F \circ \omega\colon I \to Y$$

on polku

$$\underbrace{(g \circ \alpha^{\leftarrow})}_{(2)} \cdot \underbrace{(\sigma^{\leftarrow})}_{(3)} \cdot \underbrace{(f \circ \alpha)}_{(4)} \cdot \underbrace{(\sigma)}_{(5)}.$$

(Huom. käänteinen suunta kohdissa (2) ja (3)). Koska I^2 on konveksi, on $\omega \sim \epsilon_{z_0}$ I^2:ssa, mistä seuraa, että $F \circ \omega \sim F \circ \epsilon_{z_0} = \epsilon_{y_1}$ Y:ssä. Siis kaava (1) pätee.

Huom. Homotopialle $\sigma^{\leftarrow}(f \circ \alpha)\sigma \sim g \circ \alpha$ voi löytää seuraavan lausekkeen (Kristian Setälä):

$$H(s,t) = \begin{cases} \sigma^{\leftarrow}(3(1-t)s), & \text{jos } 0 \le s \le 1/3 \\ h(\alpha(3(s-\frac{1}{3})), t), & \text{jos } 1/3 \le s \le 2/3 \\ \sigma(3(1-t)(s-\frac{2}{3}) + t), & \text{jos } 2/3 \le s \le 1. \end{cases}$$

5. Olkoon $f\colon X \to Y$ homotopiaekvivalenssi, $g\colon Y \to X$ f:n homotopiakäänteiskuvaus ja $x_0 \in X$.
Koska $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$, on edellisen tehtävän nojalla

$$(g \circ f)_* = \sigma_\sharp \circ (\mathrm{id}_X)_*,$$

missä σ on polku X:ssä pisteestä x_0 pisteeseen $gf(x_0)$. Siis

$$(g \circ f)_* = \sigma_\sharp\colon \pi(X, x_0) \to \pi(X, gf(x_0)).$$

Vastaavasti saadaan

$$(f \circ g)_* = \gamma_\sharp\colon \pi(Y, f(x_0)) \to \pi(Y, fgf(x_0)),$$

missä γ on polku Y:ssä pisteestä $f(x_0)$ pisteeseen $fgf(x_0)$.
Homomorfismit $\sigma_\sharp$ ja $\gamma_\sharp$ ovat isomorfismeja, joten $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ ja $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$ ovat isomorfismeja:

$$\begin{tikzcd}
\pi(X, x_0) \arrow[r, "f_*"] \arrow[dr, "\cong", "\sigma_\sharp"'] & \pi(Y, f(x_0)) \arrow[d, "g_*"'] \\
 & \pi(X, gf(x_0))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\pi(Y, f(x_0)) \arrow[d, "g_*"'] \arrow[dr, "\gamma_\sharp", "\cong"'] & \\
\pi(X, gf(x_0)) \arrow[r, "f_*"'] & \pi(Y, fgf(x_0)).
\end{tikzcd}$$

Huom. Yllä olevissa kaavioissa funktio g_* on sama (samojen ryhmien välinen), mutta f_* ei ole (täsmällisempää olisi merkitä toista funktioista f'_* tms.).
Koska $\sigma_\sharp$ on bijektio, on ylemmän kaavion nojalla g_* surjektio. Koska $\gamma_\sharp$ on bijektio, on alemman kaavion nojalla g_* injektio. Siis g_* on bijektio. Koska ylemmässä kaaviossa $\sigma_\sharp$ ja g_* ovat bijektioita, on f_* bijektio, siis isomorfismi.

6. Olkoon $p\colon X \to Y$ peitekuvaus.

1) p surjektio: sisältyy määritelmään.

2) p avoin: Olkoon $U \Subset X$, $y \in pU$. Olkoon V y:n peiteympäristö ja $p^{-1}V = \cup_{j \in J} U_j$ kuten määritelmässä. Valitaan $x \in U$ siten, että $p(x) = y$ ja olkoon U_{j_0} se joukoista U_j, joka sisältää pisteen x. Nyt $U_{j_0} \cap U \Subset U_{j_0}$.

Koska $p|: U_{j_0} \to V$ on homeomorfismi, on $p(U_{j_0} \cap U) \Subset V \Subset Y$. Siis $p(U_{j_0} \cap U)$ on y:n ympäristö ja $p(U_{j_0} \cap U) \subset pU$, joten pU on avoin.

3) p immersio: Olkoon $x \in X$. Olkoon $y = p(x)$, V y:n peiteympäristö, $p^{-1}V = \cup_{j \in J} U_j$ kuten edellä ja $j_0 \in J$ siten, että $x \in U_{j_0}$. Nyt U_{j_0} on x:n ympäristö ja $p|: U_{j_0} \to V$ on homeomorfismi, joten $p|U_{j_0}: U_{j_0} \to Y$ on upotus. Siis p on immersio.

Huom. Väisälän kirjassa sana "kuvaus" ei sisällä oletusta jatkuvuudesta. Esim. immersion määritelmästä seuraa, että immersio on aina jatkuva. Siis myös peitekuvaus on aina jatkuva.