Homotopia ja vektorikimput
Harjoitus 2. Ratkaisuja.

1. a) Koska Y on kutistuva, on olemassa homotopia $h: Y \times I \to Y$, $\mathrm{id}_Y \simeq c_{y_0}$ jollakin $y_0 \in Y$ (tässä siis c_{y_0} on vakiokuvaus $c_{y_0}(y) \equiv y_0$). Merkitään $c'_{y_0}: X \to Y$ vakiokuvaus $c'_{y_0}(x) \equiv y_0$. Määritellään

$$H: X \times I \to Y$$

$$H(x,t) = h(f(x),t).$$

Selvästi H on jatkuva. Lisäksi $H(x,0) = h(f(x),0) = f(x)$ ja $H(x,1) = h(f(x),1) = y_0$ jokaisella $x \in X$, joten $H: f \simeq c'_{y_0}$.
Vastaavasti $g \simeq c'_{y_0}$, joten $f \simeq c'_{y_0} \simeq g$.

b) Kts. Väisälä, Esim. 21.10.2.

2. Merkitään pisteiden $(0,0), (1,0)$ ja $(0,1)$ määräämää kolmiota K:lla ja lisäksi merkitään $S_1 = \{0\} \times [1,\infty[$, $S_2 = [1,\infty[\times\{0\}$, $S_3 = \{0\}\times]-\infty,0]$ ja $S_4 =]-\infty,0] \times \{0\}$, jolloin $X = K \cup S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$.
Määritellään sitten $f: X \to K$:

$$f(a) = \begin{cases} a, & \text{jos } a \in K \\ (0,1), & \text{jos } a \in S_1 \\ (1,0), & \text{jos } a \in S_2 \\ (0,0), & \text{jos } a \in S_3 \\ (0,0), & \text{jos } a \in S_4. \end{cases}$$

Merkitään inkluusiota $i: K \to X$. Selvästi $f \circ i = \mathrm{id}_K$. Janahomotopia osoittaa, että $i \circ f \simeq \mathrm{id}_X$. Siis $K \simeq X$. Voidaan pitää tunnettuna, että $K \approx S^1$. Siis $X \simeq S^1$.

3. Oletetaan, että X on polkuyhtenäinen, $x_0 \in X$ ja $\alpha: I \to X$ polku. Osoitetaan ensin, että $\alpha \simeq \epsilon_{x_0}$.
Määritellään

$$H_1: I \times I \to X$$

$$(s,t) \mapsto \alpha(ts),$$

jolloin $H_1: \epsilon_{\alpha(0)} \simeq \alpha$.

Olkoon β polku pisteestä $\alpha(0)$ pisteeseen x_0. Määritellään

$$H_2 \colon I \times I \to X$$

$$(s,t) \mapsto \beta(t),$$

jolloin $H_2 \colon \epsilon_{\alpha(0)} \simeq \epsilon_{x_0}$. Siis

$$\alpha \simeq \epsilon_{\alpha(0)} \simeq \epsilon_{x_0}.$$

Olkoot nyt $\alpha, \gamma \colon I \to X$ polkuja. Osoitetaan, että $\alpha \simeq \gamma$: Edellisen nojalla jokainen polku on homotooppinen vakiopolun ϵ_{x_0} kanssa, joten

$$\alpha \simeq \epsilon_{x_0} \simeq \gamma.$$

4. Määritellään homotopia H osajoukoissa

$$A_1 = \{(s,t) \mid 0 \le t \le 1,\ 0 \le s \le t/2\},$$

$$A_2 = \{(s,t) \mid 0 \le t \le 1,\ t/2 \le s \le 1/2\},$$

$$A_3 = \{(s,t) \mid 0 \le t \le 1,\ 1/2 \le s \le 1-(t/2)\}$$

ja

$$A_4 = \{(s,t) \mid 0 \le t \le 1,\ 1-(t/2) \le s \le 1\}$$

kaavoilla

$$H(s,t) = \begin{cases} b, & \text{jos } (s,t) \in A_1 \\ \alpha(1-2s+t), & \text{jos } (s,t) \in A_2 \\ \alpha(2s+t-1), & \text{jos } (s,t) \in A_3 \\ b, & \text{jos } (s,t) \in A_4. \end{cases}$$

Tarkistetaan, että H on hyvin määritelty:

- joukossa $A_1 \cap A_2$ on $0 \le t \le 1, s = t/2$ ja $\alpha(1-2s+t) = \alpha(1-t+t) = \alpha(1) = b$.
- joukossa $A_2 \cap A_3$ on $0 \le t \le 1, s = 1/2$ joten $\alpha(1-2s+t) = \alpha(1-1+t) = \alpha(t)$ ja $\alpha(2s+t-1) = \alpha(1+t-1) = \alpha(t)$; saadaan siis sama tulos.
- joukossa $A_3 \cap A_4$ on $0 \le t \le 1, s = 1-(t/2)$, ja $\alpha(2s+t-1) = \alpha(2-t+t-1) = \alpha(1) = b$.

Siis H on hyvin määritelty; jatkuvuus seuraa harjoitusten 1 tehtävästä 1 b). Nyt

$$H(s,0) = \begin{cases} \alpha(1-2s), & \text{jos } 0 \leq s \leq 1/2 \\ \alpha(2s-1), & \text{jos } 1/2 \leq s \leq 1, \end{cases}$$

toisaalta

$$\alpha^{\leftarrow}\alpha(s) = \begin{cases} \alpha^{\leftarrow}(2s) = \alpha(1-2s), & \text{jos } 0 \leq s \leq 1/2 \\ \alpha(2s-1), & \text{jos } 1/2 \leq s \leq 1, \end{cases}$$

joten $H(s,0) = \alpha^{\leftarrow}\alpha(s)$ jokaisella s. Selvästi $H(s,1) = b$ jokaisella s, joten

$$H\colon \alpha^{\leftarrow}\alpha \sim \epsilon_b.$$

5. Oletetaan, että X on polkuyhtenäinen, $z \in X$ ja $\alpha\colon I \to X$ on polku. Osoitetaan, että on olemassa polku $\beta\colon I \to X$ s.e. $\alpha \sim \beta$ ja β saa arvon z. Olkoon $a = \alpha(0)$ ja σ polku pisteestä a pisteeseen z. Määritellään $\beta = (\sigma\sigma^{\leftarrow})\alpha$. Selvästi β saa arvon z ja

$$\beta = (\sigma\sigma^{\leftarrow})\alpha \sim \epsilon\alpha \sim \alpha.$$

6. a) Määritellään $f_1\colon X \to X,\ (x,y) \mapsto (x,0)$ ja $f_2\colon X \to X,\ (x,y) \mapsto (0,0)$. Nyt

$$H_1\colon X \times I \to X$$
$$(x,y,t) \mapsto (x,(1-t)y)$$

on homotopia $\mathrm{id}_X \simeq f_1$ ja

$$H_2\colon X \times I \to X$$
$$(x,y,t) \mapsto ((1-t)x,0)$$

on homotopia $f_1 \simeq f_2$. Siis

$$\mathrm{id}_X \simeq f_1 \simeq f_2,$$

joka on vakiokuvaus. Siis X on kutistuva.

b) Antiteesi: On olemassa homotopia $H\colon X \times I \to X,\ \mathrm{id}_X \simeq c_{(0,1)}$ rel $(0,1)$. Merkitään $U = B((0,1),1/2) \cap X$, joka on pisteen $(0,1)$ ympäristö X:ssä. Nyt oletuksen nojalla $H((0,1),t) = (0,1) \in U$ jokaisella $t \in I$, joten

$$\{(0,1)\} \times I \subset H^{-1}U \Subset X \times I.$$

Koska $\{(0,1)\}$ ja I ovat kompakteja, on Lauseen V:15.24 nojalla olemassa pisteen $(0,1)$ ympäristö V X:ssä, s.e.

$$V \times I \subset H^{-1}U,$$

eli $H(\bar{x},t) \in U$ jokaisella $\bar{x} \in V,\ t \in I$. $(*)$
Valitaan nyt $n \in \mathbb{N}$ s.e. $(1/n,1) \in V$. Nyt

$$\alpha\colon I \to X,\ \alpha(t) = H((1/n,1),t)$$

on polku X:ssä pisteestä $(1/n,1)$ pisteeseen $(0,1)$ ja y.o. tiedon $(*)$ nojalla $\alpha(t) \in U$ jokaisella $t \in I$.
Voidaan pitää selvänä, että pisteitä $(1/n,1)$ ja $(0,1)$ ei voi yhdistää polulla U:ssa, joten olemme päätyneet ristiriitaan. Siis k.o. homotopiaa ei ole olemassa.