Homotopia ja vektorikimput
Harj. 13 (11.12.2014)

1. Sanomme, että peite $(V_j)_{j\in J}$ on peitteen $(U_i)_{i\in I}$ tarkka tihennys, jos $J=I$ ja $V_j \subset U_j$ $\forall j \in J$. Osoita, että parakompaktin avaruuden jokaisella avoimella peitteellä on tarkka avoin lokaalisti äärellinen tihennys.

2. a) Ol., että X ja C ovat top. avaruuksia, C kompakti, ja $\varphi : X \times C \to \mathbb{R}$ jatkuva. Osoita, että kaavan
$$f : X \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \max_{c \in C} \varphi(x,c)$$
määrittelemä funktio on jatkuva.
(Vihje: [Väisälä, Lause 15.24] on hyödyllinen (ei välttämätön))

b) Anna esimerkki jatkuvasta funktiosta $\varphi : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jolla $\max_{y\in\mathbb{R}} \varphi(x,y)$ on olemassa jokaisella $x \in \mathbb{R}$, mutta funktio
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \max_{y\in\mathbb{R}} \varphi(x,y)$$
ei ole jatkuva.

3. (Luennot, s.70 alalaita)
Osoita, että funktiot $\bar{f}$ ja $\bar{g} : B \to C$ ovat homotooppiset.

4. (Vrt. luennot, Huom. 5.18)
Olkoot $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ ja $B_1 \subset B_2 \subset \ldots$ lokaalisti kompakteja Hausdorffin avaruuksia.
Varustetaan $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ja $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ rajatopologialla.
Osoita, että karteesisen tulon $A \times B$ tulotopologia on sama kuin jonon $A_1 \times B_1,\ A_2 \times B_2 \subset \ldots$ antama rajatopologia.

5. (Luennot, s.76)
Osoita funktoriaalisuusehdot $\mathrm{Vect}_n(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$, $\mathrm{Vect}_n(f \circ g) = \mathrm{Vect}_n(g) \circ \mathrm{Vect}_n(f)$.

6. (Luennot, s.77)
Osoita funktoriaalisuusehdot $[[\mathrm{id}], G_n] = \mathrm{id}$, $[[f][h], G_n] = [[h], G_n][[f], G_n]$.